Алгебра $AFLP_2$: исчисление помеченных недетерминированных параллельных процессов

Тарасюк И.В.

1 Введение

Для описания параллельных систем и процессов и исследования их поведенческих свойств был предложен ряд моделей, среди которых алгебраические исчисления занимают особое место. В этих исчислениях процесс описывается алгебраической формулой, и проверка его свойств выполняется посредством эквивалентностей, аксиом и правил вывода. Алгебра AFP_2 [4, 5] относится к алгебраическим исчислениям, основанным на частично упорядоченных мультимножествах (ЧУММ) и объединяет механизмы как для описания параллельных недетерминированных процессов, так и для исследования их свойств.

Достоинство алгебры AFP_2 — механизм синхронизации действий по имени, близкий к сетевому. То есть несколько одноименных действий, которые встречаются в разных частях формулы этой алгебры, синхронизируются. Считается, что этим действиям соответствует одно событие. Это позволяет описывать процессы, которые нельзя представить формулами других алгебр (например, CCS [10] или алгебры структур событий [2, 3]), в которых с каждым вхождением действия в формулу связывается уникальное событие [4]. В то же время в рамках этой алгебры нельзя, например, задать процесс, в котором два одноименных действия выполняются параллельно.

Алгебра $AFLP_2$ (Algebra of Finite Labelled Processes) строится на основе алгебры AFP_2 с помощью введения глобальной пометки на символах событий, которые комбинируются в формулы. Таким образом, формулы алгебры $AFLP_2$ описывают *помеченные* недетерминированные процессы, в которых двф различных события могут быть помечены одним и тем же действием, в отличие от формул AFP_2, специфицирующих обычные (не помеченные) недетерминированные процессы. Следовательно, в рамках этой алгебры можно описать значительно более широкий класс процессов, чем в AFP_2.

На базе помеченных частично упорядоченных множеств (ПЧУМ) в $AFLP_2$ вводится денотационная семантика в виде отображения, сопоставляющего каждой формуле этой алгебры совокупность ПЧУМ с не-событиями и тупиковыми событиями. На основе денотационной семантики определяется эквивалентность формул $AFLP_2$. Строится система аксиом, соответствующая данной эквивалентности и доказывается полнота этой системы.

Определяется также операционная семантика $AFLP_2$ на базе системы переходов, основанной на ПЧУМ. В этой системе преобразование одной формулы в другую по правилам перехода интерпретируется как выполнение некоторого ПЧУМ. Устанавливается соответствие между денотационной и операционной семантиками алгебры $AFLP_2$.

В работах [15, 16] была исследована большая группа эквивалентностей (как рассмотренных в литературе, так и введенных автором). Эти эквивалентности можно разделить на несколько следующих классов. Следовые эквивалентности: интерливинговая (обозначение $\equiv_i$) [13], шаговая ($\equiv_s$) [13], на частичных словах ($\equiv_{pw}$) [15], на ЧУММ ($\equiv_{pom}$) [6] и на процессах ($\equiv_{pr}$) [15]. Бисимуляционные эквивалентности: интерливинговая ($\underline{\leftrightarrow}_i$) [12], шаговая ($\underline{\leftrightarrow}_s$) [11], на частичных словах ($\underline{\leftrightarrow}_{pw}$) [17], на ЧУММ ($\underline{\leftrightarrow}_{pom}$) [2] и на процессах ($\underline{\leftrightarrow}_{pr}$) [1]. ST-бисимуляционные эквивалентности: интерливинговая ($\underline{\leftrightarrow}_{iST}$) [6], на частичных словах ($\underline{\leftrightarrow}_{pwST}$) [17], на ЧУММ ($\underline{\leftrightarrow}_{pomST}$) [17] и на процессах ($\underline{\leftrightarrow}_{prST}$) [15]. Сохраняющие историю бисимуляционные эквивалентности: на частичных словах ($\underline{\leftrightarrow}_{pwh}$) [15], на ЧУММ ($\underline{\leftrightarrow}_{pomh}$) [14] и на процессах ($\underline{\leftrightarrow}_{prh}$) [15]. Изоморфизм ($\simeq$) — совпадение сетей с точностью до переименования мест и переходов.

Показано , что средствами $AFLP_2$ можно анализировать поведение слабо помеченных А-сетей [7, 9] (то есть А-сетей, помечающая функция которых не обязательно инъективна). Рассмотренные в [15, 16] эквивалентности изучены на этом подклассе сетей. Эквивалентности на формулах $AFLP_2$ перенесены на слабо помеченные А-сети и исследована их взаимосвязь с сетевыми эквивалентностями.

На формулах $AFLP_2$ вводятся аналоги сетевых эквивалентностей и доказывается их согласованность с исходными эквивалентностями на сетях.

В заключение устанавливается, что эквивалентность относительно денотационной семантики $AFLP_2$ — единственная из рассмотренных эквивалентностей на формулах этой алгебры, которая является конгруэнтностью.

Заметим, что определения мультимножеств, сетей, ПЧУМ, ЧУММ, С-сетей, процессов, ST-процессов и отображений (сохраняющей пометку биекции $\approx$, гомоморфизма $\sqsubseteq$, изоморфизма $\simeq$) и других понятий, используемых в данной работе, можно найти в [15, 16].

2 Алгебра $AFLP_2$

2.1 Синтаксис

Пусть $Ev = \{e, f, \ldots\}$ — алфавит символов *(обычных) событий*, $\overline{Ev} = \{\bar{e}, \bar{f}, \ldots\}$ — алфавит символов *не-событий* и $\Delta_{Ev} = \{\delta_e, \delta_f, \ldots\}$ — алфавит символов *тупиковых событий*. Обозначим $\widehat{Ev} = Ev \cup \overline{Ev} \cup \Delta_{Ev}$. Символы $\widehat{Ev}$ связываются с помощью операций ; (*предшествование*), $\bigtriangledown$ (*исключение* или *альтернатива*), $\|$ (*параллельность*), $\vee$ (*дизъюнкция* или *объ-*

единение), $\rceil\!\rceil$ (*"не случится"*), $\tilde{\rceil\!\rceil}$ (*"не случится ошибочно"*). Введем $Act = \{a, b, \ldots\}$ — алфавит символов *действий (меток). Глобальная функция пометки* $lab : Ev \to Act$ сопоставляет каждому событию некоторое действие. Эта функция расширяется на множество $\overline{Ev} \cup \Delta_{Ev}$ следующим образом: $lab(\bar{e}) = \overline{lab(e)}$ и $lab(\delta_e) = \delta_{lab(e)}$.

Формула $AFLP_2$ над алфавитом $\widehat{Ev}$ определяется следующим образом.

1. $e,\ \bar{e},\ \delta_e$, где $e \in Ev,\ \bar{e} \in \overline{Ev},\ \delta_e \in \Delta_{Ev}$ — *элементарные формулы*;
2. Если E — формула, то $\neg E$, где $\neg \in \{\rceil\!\rceil, \tilde{\rceil\!\rceil}\}$ — тоже формула;
3. Если E и F — формулы, то $E \circ F$, где $\circ \in \{;, \|, \bigtriangledown, \vee\}$ — тоже формула.

Обозначим через $\mathbf{AFLP_2}$ *множество всех формул алгебры* $AFLP_2$.

Пусть E — формула $AFLP_2$. Определим множество $Ev(E)$ следующим образом.

1. $Ev(e) = Ev(\bar{e}) = Ev(\delta_e) = e$;
2. $Ev(\neg E) = Ev(E),\ \neg \in \{\rceil\!\rceil, \tilde{\rceil\!\rceil}\}$;
3. $Ev(E \circ F) = Ev(E) \cup Ev(F),\ \circ \in \{;, \|, \bigtriangledown, \vee\}$.

Определим также $\overline{Ev}(E) = \{\bar{e} \mid e \in Ev(E)\}$, $\Delta_{Ev}(E) = \{\delta_e \mid e \in Ev(E)\}$ и $\widehat{Ev}(E) = Ev(E) \cup \overline{Ev}(E) \cup \Delta_{Ev}(E)$.

С каждой формулой E алгебры $AFLP_2$ можно связать *локальную функцию пометки* $l_E = lab\lceil_{Ev(E)}$, помечающую символы событий, входящие в эту формулу.

Определим *содержимое* формулы E, $cont(E)$, следующим образом.

1. $cont(e) = e,\ cont(\bar{e}) = \bar{e},\ cont(\delta_e) = \delta_e$;
2. $cont(\neg E) = cont(E),\ \neg \in \{\rceil\!\rceil, \tilde{\rceil\!\rceil}\}$;
3. $cont(E \circ F) = cont(E) \cup cont(F),\ \circ \in \{;, \|, \bigtriangledown, \vee\}$.

Пусть также $cont^+(E) = cont(E) \cap Ev$ — *множество событий формулы* E, $cont^-(E) = cont(E) \cap \overline{Ev}$ — *множество не-событий формулы* E, $\Delta_{cont}(E) = cont(E) \cap \Delta_{Ev}$ — *множество тупиковых событий формулы* E.

Пусть E и E' — формулы $AFLP_2$. Тогда E и E' *изоморфны*, обозначение $E \simeq E'$, если они совпадают с точностью до применения правил ассоциативности относительно $;, \|, \vee, \bigtriangledown$ и коммутативности относительно $\|, \vee, \bigtriangledown$.

Например, $(e\|f\|\bar{g}) \vee (g\|\bar{e}\|\bar{f}) \simeq (\bar{e}\|\bar{f}\|g) \vee (f\|e\|\bar{g})$.

2.2 Денотационная семантика

Рассмотрим ПЧУМ $\rho = \langle X, \prec, l \rangle$, где:

- $X \subseteq \widehat{Ev}$;

- $\prec \subseteq X \times X$ — строгий частичный порядок над X, отношение предшествования;

- $l : Ev(X) \to Act$ — помечающая функция.

Заметим, что $Ev(X) = \{e \mid (e \in X) \vee (\bar{e} \in X) \vee (\delta_e \in X)\}$. Определим также $\overline{Ev}(X) = \{\bar{e} \mid e \in Ev(X)\}$, $\Delta_{Ev}(X) = \{\delta_e \mid e \in Ev(X)\}$ и $\widehat{Ev}(X) = Ev(X) \cup \overline{Ev}(X) \cup \Delta_{Ev}(X)$. Введем также следующие обозначения: $X^+ = X \cap Ev$ — *подмножество событий* X, $X^- = X \cap \overline{Ev}$ — *подмножество не-событий* X, $\Delta_X = X \cap \Delta_{Ev}$ — *подмножество тупиковых событий* X.

В дальнейшем будем рассматривать ПЧУМ, удовлетворяющие следующим условиям.

1. e, $\bar{e}$ и δ_e не встречаются в X вместе, то есть либо e входит в X, либо $\bar{e}$, либо δ_e;

2. отношение $\prec$ иррефлексивно;

3. $\forall x, y \in X^- \cup \Delta_X \ (x \not\prec y) \& (y \not\prec x)$, то есть все элементы $X^- \cup \Delta_X$ несравнимы;

4. $\forall x \in X^+ \ \forall y \in X^- \cup \Delta_X \ (x \not\prec y) \& (y \not\prec x)$, то есть все элементы X^+ и $X^- \cup \Delta_X$ несравнимы.

Будем писать $\rho \lhd \rho'$, если ρ — строгий префикс ρ' и $\rho \unlhd \rho'$, если ρ — префикс ρ'. *Модифицированное объединение* ПЧУМ определяется следующим образом.

$$\rho \tilde{\cup} \rho' = \begin{cases} \rho, & \rho' \unlhd \rho; \\ \rho', & \rho \unlhd \rho'; \\ \{\rho, \rho'\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Модифицированное объединение удаляет вычисления, которые могут быть продолжены в другом поведении (детерминированном процессе) недетерминированного процесса, а также одинаковые вычисления.

Для определения денотационной семантики $AFLP_2$ введем операции над ПЧУМ: ; (*предшествование*), $\|$ (*параллелизм*), $\bigtriangledown$ (*альтернатива*), $\rceil\!\rceil$ (*не случится*), $\tilde{\rceil\!\rceil}$ (*не случится ошибочно*). Если ПЧУМ ρ, сконструированный с помощью этих операций, не удовлетворяет условиям 1–4 для ПЧУМ, приведенным выше, мы “корректируем” его с помощью новой операции *регуляризации* $[\rho]$. Эта операция отделяет максимальный префикс ρ “до” появления некоторых противоречий в спецификации процесса. Все события процесса, которые случаются “после” этих противоречий, считаются тупиковыми.

Пусть $D_1 = \{\delta_e \mid (e \in X) \& (e \prec e)\} \cup \{\delta_e \mid (e \in X) \& (\bar{e} \in X)\} \cup \{\delta_e \mid (e \in X) \& (\delta_e \in X)\} \cup \{\delta_e \mid (\bar{e} \in X) \& (\delta_e \in X)\} \cup \Delta_X$, $D_2 = \{\delta_e \mid (e \in X) \& (\delta_f \in D_1) \& (\delta_f \prec e)\}$ и $D_3 = \{\delta_e \mid \bar{e} \in X\}$. Определим множество D следующим образом.

$$D = \begin{cases} \emptyset, & D_1 = \emptyset; \\ D_1 \cup D_2 \cup D_3, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $[\rho] = \langle D, \emptyset, l\lceil_{Ev(D)}\rangle \cup \langle Y, \prec \cap(Y \times Y), l\lceil_{Ev(Y)}\rangle$, где $Y = X \setminus \widehat{Ev}(D)$. Легко убедиться, что если ПЧУМ ρ удовлетворяет условиям 1–4, то $[\rho] = \rho$.

Определим операции над ПЧУМ следующим образом. Пусть $\rho = \langle X, \prec, l\rangle,\ \rho' = \langle X, \prec', l'\rangle$.

Предшествование $\rho;\rho' = [\langle X \cup X', \prec \cup \prec' \cup (X^+ \times (X')^+) \cup (\Delta_X \times (X')^+), l \cup l'\rangle]$.

Параллельность $\rho\|\rho' = [\langle X \cup X', (\prec \cup \prec')^\star, l \cup l'\rangle]$, где $(\prec \cup \prec')^\star$ — транзитивное замыкание отношения $\prec \cup \prec'$.

Альтернатива $\rho \bigtriangledown \rho' = [\langle X \cup \overline{Ev}(X'), \prec, l \cup l'\rangle]\tilde{\cup}[\langle \overline{Ev}(X) \cup X', \prec', l \cup l'\rangle]$. Заметим, что $\rho \bigtriangledown \rho'$ — не ПЧУМ, а совокупность ПЧУМ, описывающих альтернативные поведения помеченного недетермированного процесса. То есть если ρ случится, то ρ' — не случится и наоборот.

Не случится $\rceil\!\rceil\rho = \langle \overline{Ev}(X), \emptyset, l\rangle$.

Не случится ошибочно $\tilde{\rceil\!\rceil}\rho = \langle \Delta_{Ev}(X), \emptyset, l\rangle$.

Операции над ПЧУМ расширяются на совокупности ПЧУМ следующим образом. Пусть $\mathcal{P} = \cup_{i=1}^n \rho_i$ и $\mathcal{P}' = \cup_{j=1}^m \rho'_j$ — совокупности ПЧУМ. Тогда $\mathcal{P} \circ \mathcal{P}' = \tilde{\cup}_{i=1}^n(\tilde{\cup}_{j=1}^m \rho_i \circ \rho'_j)$, где $\circ \in \{;, \|, \bigtriangledown\}$ и $\neg\mathcal{P} = \tilde{\cup}_{i=1}^n \neg\rho_i$, где $\neg \in \{\rceil\!\rceil, \tilde{\rceil\!\rceil}\}$.

Недетерминированный параллельный процесс характеризуется совокупностью ПЧУМ, связанных со всеми его альтернативными поведениями. *Денотационная семантика* $AFLP_2$ — отображение $\mathcal{D}_{FL2}$ из множества формул $AFLP_2$ в совокупность ПЧУМ, определяемое следующим образом.

1. $\mathcal{D}_{FL2}[e] = \langle \{e\}, \emptyset, l_e\rangle,\ \mathcal{D}_{FL2}[\bar{e}] = \langle \{\bar{e}\}, \emptyset, l_e\rangle,\ \mathcal{D}_{FL2}[\delta_e] = \langle \{\delta_e\}, \emptyset, l_e\rangle$;
2. $\mathcal{D}_{FL2}[\neg E] = \neg\mathcal{D}_{FL2}[E],\ \neg \in \{\rceil\!\rceil, \tilde{\rceil\!\rceil}\}$;
3. $\mathcal{D}_{FL2}[E \vee F] = \mathcal{D}_{FL2}[E]\tilde{\cup}\mathcal{D}_{FL2}[F]$;
4. $\mathcal{D}_{FL2}[E \circ F] = \mathcal{D}_{FL2}[E] \circ \mathcal{D}_{FL2}[F],\ \circ \in \{;, \|, \bigtriangledown\}$.

Две формулы $AFLP_2$ E и E' *эквивалентны относительно денотационной семантики* $\mathcal{D}_{FL2}$, обозначение $E \approx_{\mathcal{D}_{FL2}} E'$, если $\mathcal{D}_{FL2}[E] = \mathcal{D}_{FL2}[E']$.

Если $\rho = \langle X, \prec, l\rangle$ — ПЧУМ, то $\rho^+ = \langle X^+, \prec, l\lceil_{X^+}\rangle$ — ПЧУМ, соответствующий "наблюдаемой" части ρ над множеством Ev. Для каждой формулы E алгебры $AFLP_2$ $\mathcal{D}_{FL2}[E] = \cup_{i=1}^n \rho_i$ — совокупность ПЧУМ, характеризующая помеченный процесс, определямый этой формулой. *"Наблюдаемую"* часть этого множества определим так: $\mathcal{D}^+_{FL2}[E] = \cup_{i=1}^n \rho_i^+$. Две формулы E и E' *наблюдаемо эквивалентны относительно денотационной семантики* $\mathcal{D}_{FL2}$, обозначение $E \approx_{\mathcal{D}^+_{FL2}} E'$, если $\mathcal{D}^+_{FL2}[E] = \mathcal{D}^+_{FL2}[E']$.

Контекст, $\mathcal{C}$, — выражение, представляющее собой формулу $AFLP_2$, в которой ноль или более подформул заменены "пустыми местами", куда могут быть подставлены другие формулы $AFLP_2$ [5]. $\mathcal{C}[E]$ будет обозначать помещение формулы E в каждое из таких пустых мест.

Утверждение 1 *Для любых формул E и E' алгебры $AFLP_2$*
$E \approx_{\mathcal{D}_{FL2}} E' \;\Leftrightarrow\; \forall \mathcal{C}\ \mathcal{C}[E] \approx_{\mathcal{D}_{FL2}} \mathcal{C}[E']$.

Доказательство. Как лемма 5.1 в [5]. $\square$

Таким образом, $\approx_{\mathcal{D}_{FL2}}$ — конгруэнтность относительно операций алгебры $AFLP_2$. Заметим, что $\approx_{\mathcal{D}^+_{FL2}}$ не является конгруэнтностью, что демонстрируется следующим примером.

Пусть $E = e \bigtriangledown f$, $E' = (e \bigtriangledown f)\|e\|f$ и $lab(e) = a,\ lab(f) = b,\ lab(g) = c$. Тогда $\mathcal{D}^+_{FL2}[E] = \mathcal{D}^+_{FL2}[E'] = \{\langle\{e\},\emptyset,l_1\rangle,\langle\{f\},\emptyset,l_2\rangle$, где $l_1(e) = a,\ l_2(f) = b$ и $E \approx_{\mathcal{D}^+_{FL2}} E'$. Но $\mathcal{D}^+_{FL2}[E;g] = \{\langle\{e,g\},\prec_1,l_1\rangle,\langle\{f,g\},\prec_2,l_2\rangle\}$, тогда как $\mathcal{D}^+_{FL2}[E';g] = \{\langle\{e\},\emptyset,l_3\rangle,\langle\{f\},\emptyset,l_4\rangle\}$, где $e \prec_1 g,\ f \prec_2 g,\ l_1(e) = l_3(e) = a,\ l_2(f) = l_4(f) = b,\ l_1(g) = l_2(g) = c$, и $E;g \not\approx_{\mathcal{D}^+_{FL2}} E';g$. Заметим, что в процессе, задаваемом формулой $E';g$, в отличие от процесса с формулой $E;g$, действие c никогда не сможет сработать.

2.3 Аксиоматизация

В соответствии с отношением эквивалентности $\approx_{\mathcal{D}_{FL2}}$ вводится система аксиом Θ_{FL2}. В следующих равенствах $E,\ F,\ G$ обозначают формулы $AFLP_2$, а $e \in Ev,\ \bar{e} \in \overline{Ev},\ \delta_e \in \Delta_{Ev}$.

1. Ассоциативность

   1.1 $E\|(F\|G) = (E\|F)\|G$

   1.2 $E \bigtriangledown (F \bigtriangledown G) = (E \bigtriangledown F) \bigtriangledown G$

   1.3 $E \vee (F \vee G) = (E \vee F) \vee G$

   1.4 $E;(F;G) = (E;F);G$

2. Коммутативность

   2.1 $E\|F = F\|E$

   2.2 $E \bigtriangledown F = F \bigtriangledown E$

   2.3 $E \vee F = F \vee E$

3. Дистрибутивность

   3.1 $(E\|F);G = (E;G)\|(F;G)$

   3.2 $E;(F\|G) = (E;F)\|(E;G)$

   3.3 $(E \vee F);G = (E;G) \vee (F;G)$

   3.4 $E;(F \vee G) = (E;F) \vee (E;G)$

   3.5 $(E \vee F)\|G = (E\|G) \vee (F\|G)$

   3.6 $E \bigtriangledown (F\|G) = (E \bigtriangledown F)\|(E \bigtriangledown G)$

4. Аксиомы для $\bigtriangledown$ и $\rceil\rceil$

4.1 $E \bigtriangledown F = (E \| (\rceil\rceil F)) \vee ((\rceil\rceil E) \| F)$

4.2 $\rceil\rceil(E \| F) = (\rceil\rceil E) \| (\rceil\rceil F)$

4.3 $\rceil\rceil(E \vee F) = (\rceil\rceil E) \vee (\rceil\rceil F)$

4.4 $\rceil\rceil(E; F) = (\rceil\rceil E) \| (\rceil\rceil F)$

4.5 $\rceil\rceil e = \bar{e}$

4.6 $\rceil\rceil \bar{e} = \bar{e}$

4.7 $\rceil\rceil \delta_e = \bar{e}$

5. Структурные свойства

5.1 $\bar{e}; E = \bar{e} \| E$

5.2 $E; \bar{e} = E \| \bar{e}$

5.3 $E \| (E; F) = (E; F)$

5.4 $F \| (E; F) = (E; F)$

5.5 $E; F; G = (E; F) \| (F; G)$

5.6 $(E; F) \| (F; G) = (E; F) \| (F; G) \| (E; G)$

5.7 $E \| E = E$

5.8 $E \vee E = E$

5.9 $E \vee F = E$, если $F \triangleleft E$ (понятие строгого префикса $\triangleleft$ на формулах будет определено дальше)

6. Аксиомы для тупиковых событий и $\tilde{\rceil\rceil}$

6.1 $e \| \bar{e} = \delta_e$

6.2 $e; e = \delta_e$

6.3 $e \| \delta_e = \delta_e$

6.4 $\delta_e; E = \delta_e \| (\tilde{\rceil\rceil} E)$

6.5 $E; \delta_e = E \| \delta_e$

6.6 $\delta_e \| (\rceil\rceil E) = \delta_e \| (\tilde{\rceil\rceil} E)$

6.7 $\tilde{\rceil\rceil} e = \delta_e$

6.8 $\tilde{\rceil\rceil} \bar{e} = \delta_e$

6.9 $\tilde{\rceil\rceil} \delta_e = \delta_e$

6.10 $\tilde{\rceil\rceil}(E \| F) = (\tilde{\rceil\rceil} E) \| (\tilde{\rceil\rceil} F)$

6.11 $\tilde{\rceil\rceil}(E; F) = (\tilde{\rceil\rceil} E) \| (\tilde{\rceil\rceil} F)$

6.12 $\tilde{\rceil\rceil}(E \vee F) = (\tilde{\rceil\rceil} E) \vee (\tilde{\rceil\rceil} F)$

Система аксиом Θ_{FL2} *соответствует* отношению эквивалентности $\approx_{\mathcal{D}_{FL2}}$, то есть если $E = E'$ — аксиома Θ_{FL2}, то $E \approx_{\mathcal{D}_{FL2}} E'$. Доказательство этого факта состоит в определении денотационных семантик E и E' и в проверке на равенство совокупностей ПЧУМ, соответствующих этим формулам. Это можно сделать непосредственно из определения операций над ПЧУМ.

Для доказательства *полноты* системы аксиом Θ_{FL2} вводится понятие канонической формы формулы $AFLP_2$.

2.4 Каноническая форма формул

Введем понятия, связанные со структурой формулы.

Предшествование — формула вида $E_1; \ldots ; E_n =;_{i=1}^n E_i,\ E_i \in \widehat{Ev}$ $(1 \leq i \leq n)$;

Конъюнкция — формула вида $E_1 \| \ldots \| E_n = \|_{i=1}^n E_i$, где E_i — предшествования $(1 \leq i \leq n)$.

Дизъюнкция — формула вида $E = E_1 \vee \ldots \vee E_n = \vee_{i=1}^n E_i$, где E_i $(1 \leq i \leq n)$ — конъюнкции.

Нормальная конъюнкция — конъюнкция $E = \|_{i=1}^n E_i$, для которой истинны следующие утверждения.

1. Каждая формула E_i $(1 \leq i \leq n)$ имеет одну из следующих форм:
   (a) элементарная формула e $(e \in Ev)$, $\bar{e}$ $(\bar{e} \in \overline{Ev})$, δ_e $(\delta_e \in \Delta_{Ev})$;
   (b) *элементарное предшествование* $(e; f)$, где $e, f \in Ev$ и $e \neq f$;
2. Если имеется формула E_i $(1 \leq i \leq n)$ в форме δ_e $(\delta_e \in \Delta_{Ev})$, тогда нет другой формулы E_j $(1 \leq j \leq n)$ такой, что $E_j = \bar{f}$ $(\bar{f} \in \overline{Ev})$;
3. Для любых формул E_i и E_j $(1 \leq i \neq j \leq n)$ таких, что $Ev(E_i) \cap Ev(E_j) \neq \emptyset$, E_i и E_j должны иметь форму различных элементарных предшествований;
4. Для любой пары $E_i = (e; f)$ и $E_j = (f; g)$ $(1 \leq i \neq j \leq n)$ существует формула $E_k = (e; g)$ $(1 \leq k \leq n)$, описывающая транзитивное замыкание отношения предшествования для событий e, f и g.

Пусть E и F — нормальные конъюнкции. Формула E — *строгий префикс* формулы F, обозначение $E \lhd F$, если выполняются следующие условия.

1. $Ev(E) = Ev(F)$;
2. $cont^+(E) \subset cont^+(F)$;
3. элементарное предшествование $(e; f)$ является конъюнктивным членом F и $f \in cont^+(E)$ тогда и только тогда, когда $(e; f)$ — конъюнктивный член E;

Формула E — *префикс* формулы F, обозначение $E \trianglelefteq F$, если $E \triangleleft F$ или $E \simeq F$.

Например, в формуле $(e\|g\|\bar{f}\|\bar{h}\|\bar{k}) \vee (g\|\delta_e\|\delta_f\|\delta_h\|\delta_k) \vee (e\|\delta_f\|\delta_g\|\delta_h\|\delta_k) \vee ((f;h)\|(f;k)\|\bar{e}\|\bar{g})$ вторая и третья конъюнкции — строгие префиксы первой.

Формула E имеет *каноническую форму*, если она является дизъюнкцией $E = \vee_{i=1}^{n} E_i$ и выполняются следующие условия.

1. E_i $(1 \leq i \leq n)$ — нормальная конъюнкция;
2. для любых E_i и E_j $(1 \leq i \neq j \leq n)$ $E_i \not\simeq E_j$;
3. для любых E_i и E_j $(1 \leq i \neq j \leq n)$ $\neg(E_i \triangleleft E_j \vee E_j \triangleleft E_i)$.

Будем обозначать каноническую форму формулы E через $canon(E)$.

Заметим, что каждый дизъюнктивный член канонической формы формулы характеризует одно из возможных альтернативных поведений недетерминированного процесса, который описывается этой формулой, и является представлением ПЧУМ, соответствующего этому поведению.

Например, формула $(e\|g\|\bar{f}\|\bar{h}\|\bar{k}) \vee ((f;h)\|(f;k)\|\bar{e}\|\bar{g})$ имеет каноническую форму, которая является представлением двух ПЧУМ, соответствующих детерминированным процессам недетерминированного процесса, описываемого этой формулой.

Запись $E =_{\Theta_{FL2}} E'$ означает, что равенство формул E и E' может быть доказано с использованием системы аксиом Θ_{FL2}.

Теорема 1 *Любая формула $AFLP_2$ может быть сведена с помощью системы аксиом Θ_{FL2} к единственной до изоморфизма канонической форме.*

Доказательство. Как теорема 6.1 в [5]. □

Теорема 2 *Для любых формул E и E' алгебры $AFLP_2$ истинно*
$E \approx_{\mathcal{D}_{FL2}} E' \Leftrightarrow E =_{\Theta_{FL2}} E'$.

Доказательство. Как теорема 6.2 в [5]. □

Таким образом, мы можем выяснить, эквивалентны ли любые две формулы E и E' алгебры $AFLP_2$ относительно денотационной семантики. Для этого достаточно привести эти формулы к каноническим формам $canon(E)$ и $canon(E')$ и проверить эти канонические формы на изоморфизм.

2.5 Операционная семантика

Система переходов — четверка $TS = \langle S, L, \rightarrow, s_{TS} \rangle$, где:

- S — множество состояний;
- L — множество меток;
- $\rightarrow \subseteq S \times L \times S$ — множество переходов;
- s_{TS} — начальное состояние.

Переход $(s, a, \tilde{s})$ будем изображать как $s \xrightarrow{a} \tilde{s}$. Будем также рассматривать только *конечные* системы переходов, то есть системы с конечным множеством состояний.

Рассмотрим систему переходов над формулами алгебры $AFLP_2$. Пусть E — формула $AFLP_2$. Тогда
$TS(E) = \langle \mathbf{AFLP_2} \cup \{\nu\}, \mathbf{AFLP_2}, \rightarrow_{TS}, canon(E) \rangle$, где:

- Множество состояний, $\mathbf{AFLP_2} \cup \{\nu\}$, — множество формул $AFLP_2$, дополненное специальным символом "пустой" формулы ν, обозначающей исчерпание, то есть то, что произошли все события процесса, задаваемого формулой. Предполагается, что для любой формулы F алгебры $AFLP_2$ $F \| \nu = \nu \| F = F$ и $cont(\nu) = \emptyset$.

- Множество меток — совокупность конъюнкций алгебры $AFLP_2$ над алфавитом Ev. Каждая из таких конъюнкций G является представлением ПЧУМ $\rho_G = \langle cont(G), \prec_G^\star, l_G \rangle$, где $e \prec_G f \;\; \Leftrightarrow \;\; (e; f)$ — конъюнктивный член G, а $\prec_G^\star$ — транзитивное замыкание отношения $\prec_G$.

- Переход $F \xrightarrow{G} \tilde{F} \in \rightarrow_{TS}$ описывает преобразование формулы F в $\tilde{F}$ как результат выполнения ПЧУМ ρ_G.

- Начальное состояние, $canon(E)$, — каноническая форма формулы E. Мы не различаем системы переходов с начальными состояниями — изоморфными каноническими формами.

Определим множество переходов $TS(E)$ на основе следующих правил вывода.

1. Элементарное событие

   1.1 $e \xrightarrow{e} \nu$

2. Элементарное предшествование

   2.1 $e; f \xrightarrow{e} f$

   2.2 $e; f \xrightarrow{e;f} \nu$

3. Параллельность

   3.1 $\dfrac{E \xrightarrow{G} \tilde{E}}{E \| F \xrightarrow{G} \tilde{E} \| F}$ $cont(G) \cap cont(F) = \emptyset$

   3.2 $\dfrac{F \xrightarrow{G} \tilde{F}}{E \| F \xrightarrow{G} E \| \tilde{F}}$ $cont(G) \cap cont(E) = \emptyset$

   3.3 $\dfrac{E \xrightarrow{G} \tilde{E},\; F \xrightarrow{H} \tilde{F}}{E \| F \xrightarrow{G \| H} \tilde{E} \| \tilde{F}}$ $cont(G) \cap cont(\tilde{F}) = \emptyset,\;\; cont(H) \cap cont(\tilde{E}) = \emptyset$

4. Дизъюнкция

4.1 $\frac{E \xrightarrow{G} \tilde{E}}{E \vee F \xrightarrow{G} \tilde{E}}$ $cont(G) \not\subseteq cont(F)$

4.2 $\frac{F \xrightarrow{G} \tilde{F}}{E \vee F \xrightarrow{G} \tilde{F}}$ $cont(G) \not\subseteq cont(E)$

4.3 $\frac{E \xrightarrow{G} \tilde{E},\ F \xrightarrow{H} \tilde{F}}{E \vee F \xrightarrow{G} \tilde{E} \vee \tilde{F}}$ $canon(G) \simeq canon(H)$

Пусть $\mathbf{TS}(E) = \{G \mid \exists \tilde{E} :\ canon(E) \xrightarrow{G} \tilde{E}\}$ — *множество формул системы* $TS(E)$. Если $F \xrightarrow{G} \tilde{F}$ — некоторый переход системы $TS(E)$, и к формуле F не применимо ни одно из правил вывода этой системы, то $\tilde{F}$ — *конечная формула* системы $TS(E)$. Легко заметить, что $\tilde{F}$ — либо пустая формула ν, либо конъюнкция символов не-событий и тупиковых событий. Конечная формула системы $TS(E)$ содержит информацию о том, какие события не смогли произойти в данном поведении недетерминированного процесса, который описывает формула E. Обозначим через $\mathbf{TS_{max}}(E) = \{G \mid \exists \tilde{E}$ — конечная формула $TS(E) :\ canon(E) \xrightarrow{G} \tilde{E}\}$ — *множество максимальных формул системы* $TS(E)$.

Пусть E — нормальная конъюнкция $AFLP_2$. Обозначим через E^+ формулу, полученную в результате удаления из E символов множества $\overline{Ev} \cup \Delta_{Ev}$. E^+ определяется следующим образом.

1. $e^+ = e,\ \bar{e}^+ = \delta_e^+ = \nu$,
2. $(e;f)^+ = e;f$,
3. $(E \circ F)^+ = E^+ \circ F^+,\ \circ \in \{\|, \vee\}$.

Из определения правил вывода системы $TS(E)$ следует, что $\forall G \in \mathbf{TS_{max}}(E)$ $\exists F$ — дизъюнктивный член $canon(E)$ такой, что $G \simeq F^+$ и наоборот. Заметим, что для любой формулы H алгебры $AFLP_2$ такой, что $H = G\|\tilde{E}$, где $G \in \mathbf{TS_{max}(E)}$ и $canon(E) \xrightarrow{G} \tilde{E}$ существует дизъюнктивный член F формулы $canon(E)$ такой, что $H \simeq F$ и наоборот.

Операционная семантика алгебры $AFLP_2$ — отображение $\mathcal{O}_{FL2}$ из $\mathbf{AFLP_2}$ в совокупность ПЧУМ, определяемое следующим образом: $\mathcal{O}_{FL2}[E] = \{\rho_{G\|\tilde{E}} \mid G \in \mathbf{TS_{max}}(E)\ \&\ canon(E) \xrightarrow{G} \tilde{E}\}$. Для любой формулы E алгебры $AFLP_2$ $\mathcal{O}_{FL2}[E] = \cup_{i=1}^{n} \rho_i$ — совокупность ПЧУМ, характеризующая помеченный процесс, определяемый этой формулой. *"Наблюдаемую"* часть этого множества определим следующим образом. $\mathcal{O}^+_{FL2}[E] = \cup_{i=1}^{n} \rho_i^+$. Заметим, что $\mathcal{O}^+_{FL2}[E] = \{\rho_G \mid G \in \mathbf{TS_{max}}(E)\}$, так как по определению правил перехода системы $TS(E)$ для любой формулы G такой, что $\rho_G \in \mathcal{O}^+_{FL2}[E]$, выполняется следующее: $cont(G) \subseteq Ev$ и $cont(\tilde{E}) \subseteq \overline{Ev} \cup \Delta_{Ev}$, где $canon(E) \xrightarrow{G} \tilde{E}$.

Пусть E — формула $AFLP_2$. Тогда по определению канонической формы $\mathcal{D}_{FL2}[E] = \{\rho_F \mid F$ — дизъюнктивный член $canon(E)\}$, и мы имеем следующее равенство, устанавливающее взаимосвязь между денотационной и операционной семантиками $AFLP_2$:

$$\mathcal{O}_{FL2}[E] = \mathcal{D}_{FL2}[E]$$

2.6 Эквивалентности на слабо помеченных А-сетях

Подобно тому, как была введена пометка на формулах AFP_2 и получена алгебра $AFLP_2$, описывающая помеченные недетерминированные процессы, можно ввести пометку на формулах AFP_0 и получить алгебру $AFLP_0$. Так как формулы алгебры AFP_0 описывают конечные А-сети, формулы алгебры $AFLP_0$ будут описывать конечные *слабо помеченные А-сети* (то есть А-сети, помечающая функция которых не обязательно инъективна).

Формально, *А-сеть* [7, 9] — это ациклическая ординарная строго помеченная сеть $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N, M_N \rangle$ со следующими свойствами.

1. $\forall p \in P_N\ ({}^\bullet p \neq \emptyset) \vee (p^\bullet \neq \emptyset)$, то есть нет изолированных мест;
2. $\forall p, q \in P_N\ ({}^\bullet p = {}^\bullet q) \& (p^\bullet = q^\bullet) \ \Rightarrow\ p = q$, то есть нет "лишних" мест;
3. $\forall t \in T_N\ ({}^\bullet t \neq \emptyset) \& (t^\bullet \neq \emptyset)$, то есть все переходы имеют входные и выходные места;
4. $\forall x \in P_N \cup T_N\ |\{y \mid y \prec_N x\}| < \infty$, то есть N — сеть с конечным множеством причин (здесь $\prec_N = F_N^\star$ — транзитивное замыкание отношения F_N);
5. $\forall p \in P_N\ \forall t, u \in T_N\ t, u \in {}^\bullet p \ \Rightarrow\ t \ \mathbf{al}\ u$, то есть переходы с общим выходным местом альтернативны;
6. $M_N = {}^\circ N$, то есть начальная маркировка — множество входных мест сети.

Отношение *альтернативы*, обозначаемое $\mathbf{al}$, определяется следующим образом. Пусть в сети N $t, u \in T_N$, тогда $t\ \mathbf{al}\ u$, если выполняются следующие условия.

1. $\neg(t \prec_N u \vee u \prec_N t)$;
2. $({}^\bullet t \cap {}^\bullet u \neq \emptyset) \vee (\exists p \in {}^\bullet t\ \forall t' \in {}^\bullet p\ t'\ \mathbf{al}\ u) \vee (\exists q \in {}^\bullet u\ \forall u' \in {}^\bullet q\ t\ \mathbf{al}\ u') \vee (t = u)$.

Заметим, что в исходном определении [9] А-сеть считается непомеченной, что в данном определении соответствует требованию о строгой помеченности (никакие два различных перехода не помечаются одним и тем же действием). Так как мы рассматриваем только сети с конечными процессами, то пункт 4 определения А-сети можно опустить. Из свойств 5 и 6 этого определения следует, что А-сети безопасны.

Определим отображение $\Psi_L : \mathbf{AFLP_0} \to \mathbf{AFLP_2}$ из множества формул $AFLP_0$ в множество формул $AFLP_2$ следующим образом.

1. $\Psi_L(e) = e$,

2. $\Psi_L(E;_{FL0} F) = E;_{FL2} F$,

3. $\Psi_L(E\|_{FL0}F) = E\|_{FL2}F$,

4. $\Psi_L(E \bigtriangledown_{FL0} F) = E \bigtriangledown_{FL2} F$.

Заметим, что символом “$FL0$” помечены операции $AFLP_0$, а символом “$FL2$” — операции $AFLP_2$. Денотационная семантика алгебры $AFLP_0$ — отображение $\mathcal{D}_{FL0}$, сопоставляющее каждой формуле E этой алгебры множество максимальных С-подсетей (максимальных О-подсетей, в терминах [4]) конечной А-сети N, которая описывается этой формулой. Отметим также, что каждой С-сети $C = \langle P_C, T_C, F_C, l_C\rangle$ соответствует ПЧУМ $\rho_C = \langle T_C, \prec_C, l_C\rangle$.

Теорема 3 *Пусть E — формула $AFLP_0$ и F — формула $AFLP_2$ такая, что $F = \Psi_L(E)$. Тогда $\{\rho_C \mid C \in \mathcal{D}_{FL0}[E]\} = \mathcal{D}^+_{FL2}[F]$.*

Доказательство. Как теорема 4.3 в [4], с учетом дополнительной информации о пометке событий, входящих в формулы E и F. $\square$

Таким образом, каждой формуле E алгебры $AFLP_0$, описывающей конечную слабо помеченную А-сеть N, соответствует формула F алгебры $AFLP_2$ такая, что совокупность ПЧУМ максимальных С-подсетей N совпадает с совокупностью ПЧУМ максимальных детерминированных процессов недетерминированного процесса, задаваемого формулой F. Заметим, что результат теоремы справедлив также для произвольных (не только максимальных) начальных С-подсетей N и для произвольных детерминированных процессов, описываемых формулой F. В этом случае начальным С-подсетям будут соответствовать начальные детерминированные процессы.

Заметим также, что отображение Ψ_L всего лишь заменяет операции $AFLP_0$ на операции $AFLP_2$ в исходной формуле. Следовательно, если у нас есть конечная слабо помеченная А-сеть N, определяемая формулой E в $AFLP_0$, мы можем анализировать ее свойства и поведение посредством той же самой формулы E в $AFLP_2$.

Рассмотрим, какие формулы E и E' алгебры $AFLP_2$ соответствуют сетям N и N' в примерах на рисунках 1 и 2. Положим $lab(e) = lab(e_i) = a$, $lab(f) = lab(f_i) = b$, $lab(g) = lab(g_i) = c$, $lab(h) = lab(h_i) = d$ $(1 \le i \le 3)$.

- На рисунке 1.1 $E = e_1\|f_1$, $E' = (e_1; f_1) \bigtriangledown (e_2; f_2)$,
- На рисунке 1.2 $E = (e_1; f) \bigtriangledown e_2$, $E' = e_1; f$,
- На рисунке 1.3 $E = (e; f_1)\|(f_1 \bigtriangledown f_2)$, $E' = e\|f_1$,
- На рисунке 1.4 $E = (e; f)\|e$, $E' = e; f$,
- На рисунке 1.5 $E = (e; f_1)\|(g; h_1)$,
$E' = (e; (f_1 \bigtriangledown f_2))\|(e; (f_2 \bigtriangledown h_1))\|(g; (f_2 \bigtriangledown h_1))\|(g; (h_1 \bigtriangledown h_2))\|(f_1 \bigtriangledown h_2)$,

- На рисунке 2.1 $E = ((e_1 \bigtriangledown e_2); f_1)\|(f_1 \bigtriangledown f_2)\|e_1\|e_2\|f_2$,
$E' = ((e_1; f_1) \bigtriangledown (e_2; f_3))\|(f_1 \bigtriangledown f_2)\|(e_2 \bigtriangledown f_2)\|e_1\|f_3$,

- На рисунке 2.2 $E = (e; f_1; h)\|(e; g_2)\|(g_1 \bigtriangledown g_2)\|f_1\|g_1$,
$E' = (e; (f_1 \bigtriangledown f_2); h)\|(e; g_2)\|(f_2 \bigtriangledown g_1)\|(g_1 \bigtriangledown g_2)\|f_1$.

Рассмотрим, как ведут себя эквивалентности на слабо помеченных А-сетях. В отличие от А-сетей, на слабо помеченных А-сетях взаимосвязь эквивалентностей выглядит так же, как и на сетях общего вида. Это доказывается следующими примерами на слабо помеченных А-сетях.

- На рисунке 1.1 $N \underline{\leftrightarrow}_i N'$, но $N \not\equiv_s N'$, так как только в сети N действия a и b могут выполниться параллельно.

- На рисунке 1.2 $N \equiv_{pr} N'$, но $N \underline{\not\leftrightarrow}_i N'$, так как только в N можно выполнить действие a так, что после него нельзя выполнить b.

- На рисунке 1.3 $N \underline{\leftrightarrow}_{pwh} N'$, но $N \not\equiv_{pom} N'$, так как в N b может зависеть от a.

- На рисунке 1.4 $N \underline{\leftrightarrow}_{pomh} N'$, но $N \not\equiv_{pr} N'$, так как в сети N переход с пометкой a имеет дополнительное выходное место.

- На рисунке 1.5 $N \underline{\leftrightarrow}_{iST} N'$, но $N \not\equiv_{pw} N'$, так как сети N соответствует ЧУММ такое, что даже менее последовательное ЧУММ не может быть выполнено в N'.

- На рисунке 2.1 $N \underline{\leftrightarrow}_{pr} N'$, но $N \underline{\not\leftrightarrow}_{iST} N'$, так как в N' действие a может так начать работать, что никакое b уже не может стартовать, пока a не окончит работу.

- На рисунке 2.2 $N \underline{\leftrightarrow}_{prST} N'$, но $N \underline{\not\leftrightarrow}_{pwh} N'$, так как только N' может выполнить a и b так, чтобы следующее действие, c, обязательно зависело от a.

- На рисунке 4.2 $N \underline{\leftrightarrow}_{prh} N'$, но $N \not\simeq N'$, так как в сети N' — два перехода с пометкой a.

Рассмотрим сеть N' на рисунке 1.5. Ей соответствует формула $AFLP_2$ $E' = (e; (f_1 \bigtriangledown f_2))\|(e; (f_2 \bigtriangledown h_1))\|(g; (f_2 \bigtriangledown h_1))\|(g; (h_1 \bigtriangledown h_2))\|(f_1 \bigtriangledown h_2)$, $lab(e) = a$, $lab(f_1) = lab(f_2) = b$, $lab(g) = c$, $lab(h_1) = lab(h_2) = d$, такая, что $canon(E') = ((e; f_1)\|(e; h_1)\|(g; h_1)\|\bar{f}_2\|\bar{h}_2) \vee ((e; f_2)\|(g; f_2)\|(g; h_2)\|\bar{f}_1\|\bar{h}_1)$. Помеченный недетерминированный процесс, задаваемый формулой E', имеет два ПЧУМ, представленных на рисунке 3. На этом рисунке возле имен событий в скобках стоят действия, помечающие эти события, а частичный порядок изображается стрелками.

Покажем, что в системе $TS(E')$ из начальной формулы, $canon(E')$, может сработать часть первого ПЧУМ, не включающая событие f_1. В следующих применениях правил перехода системы $TS(E)$ к подформулам $canon(E')$ под стрелкой будет стоять номер применяемого правила, а в скобках справа — проверка условий этого правила.

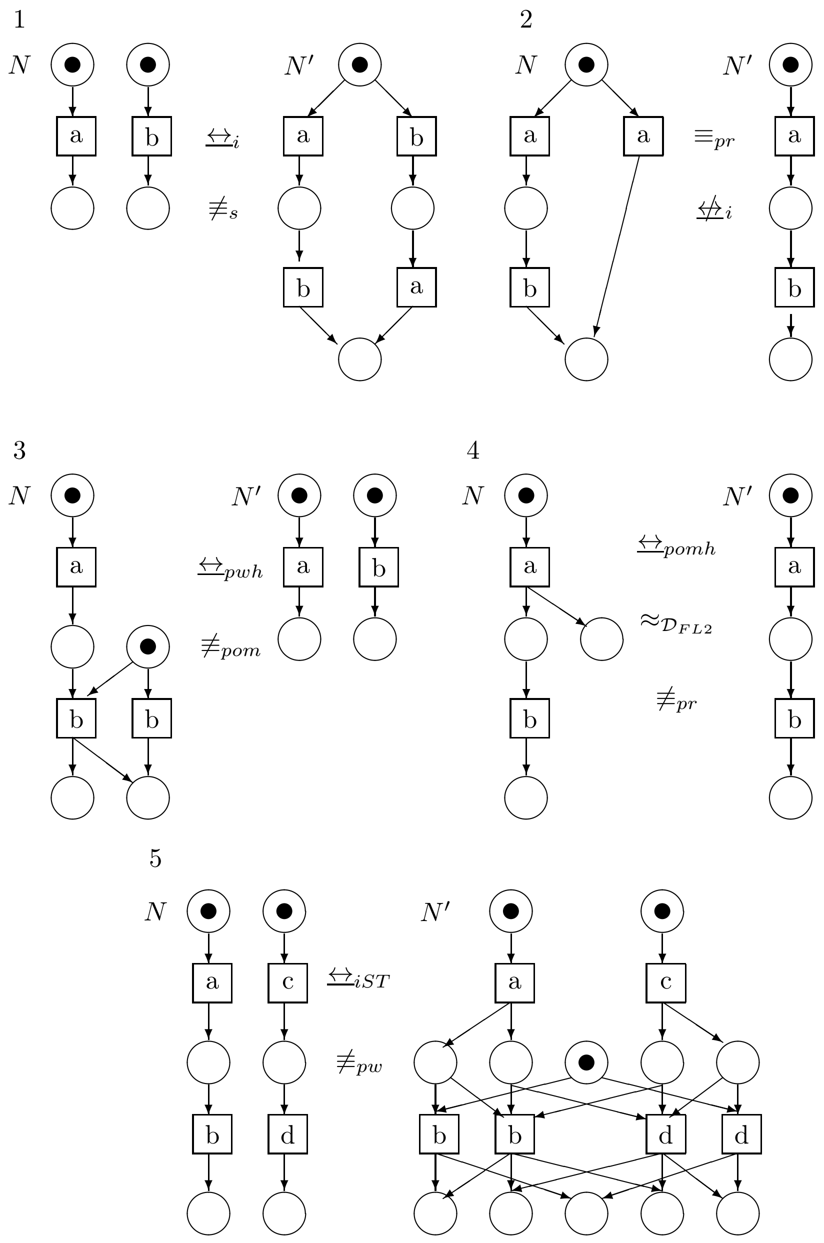

Рис. 1: Примеры на слабо помеченных A-сетях

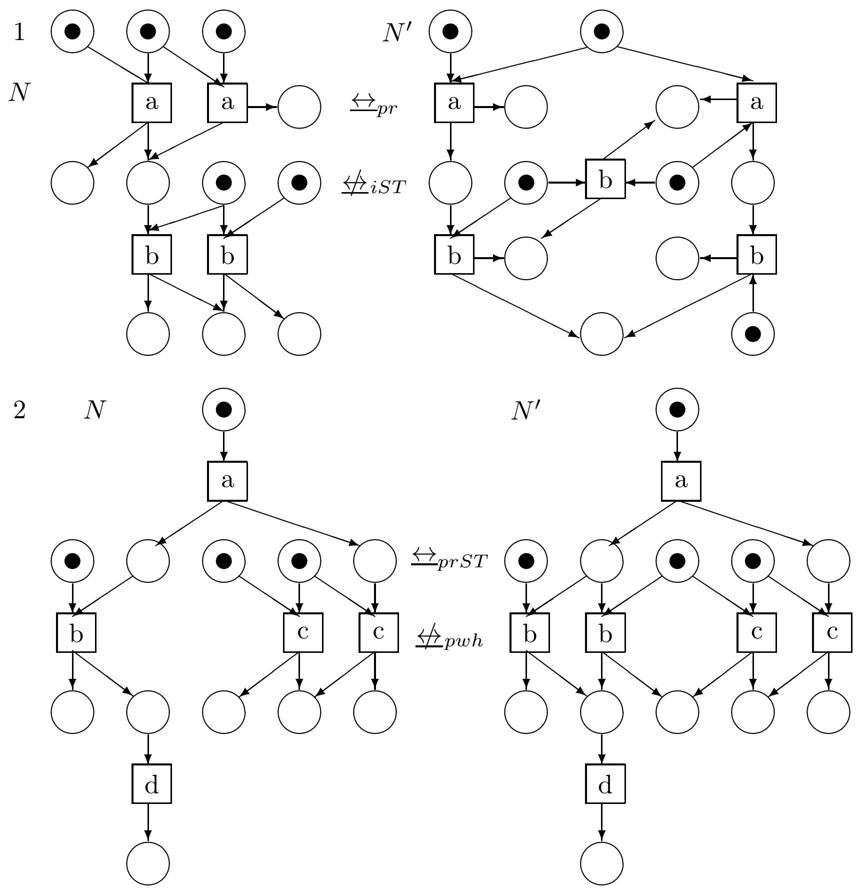

Рис. 2: Примеры на слабо помеченных A-сетях (продолжение)

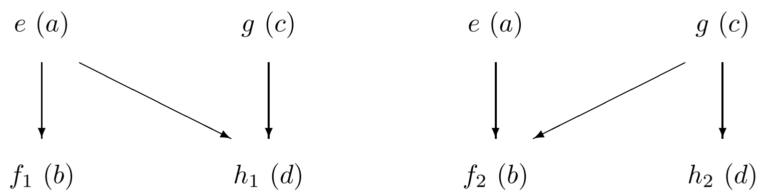

Рис. 3: Совокупность ПЧУМ помеченного недетерминированного процесса

1. $e; f_1 \xrightarrow{e}_{2.1} f_1$

2. $e; h_1 \xrightarrow{e;h_1}_{2.2} \nu$

3. $(e; f_1)\|(e; h_1) \xrightarrow{e\|(e;h_1)}_{3.3} f_1\|\nu$ $(\{e\} \cap \emptyset = \emptyset,\ \{e, h_1\} \cap \{f_1\} = \emptyset)$

4. $g; h_1 \xrightarrow{g;h_1}_{2.2} \nu$

5. $(e; f_1)\|(e; h_1)\|(g; h_1) \xrightarrow{e\|(e;h_1)\|(g;h_1)}_{3.3} f_1\|\nu\|\nu$ $(\{e, h_1\} \cap \emptyset = \emptyset,$ $\{g, h_1\} \cap \{f_1\} = \emptyset)$

6. $(e; f_1)\|(e; h_1)\|(g; h_1)\|\bar{f}_2 \xrightarrow{e\|(e;h_1)\|(g;h_1)}_{3.1} f_1\|\nu\|\nu\|\bar{f}_2$ $(\{e, g, h_1\} \cap \{\bar{f}_2\} = \emptyset)$

7. $(e; f_1)\|(e; h_1)\|(g; h_1)\|\bar{f}_2\|\bar{h}_2 \xrightarrow{e\|(e;h_1)\|(g;h_1)}_{3.1} f_1\|\nu\|\nu\|\bar{f}_2\|\bar{h}_2$ $(\{e, g, h_1\} \cap \{\bar{h}_2\} = \emptyset)$

8. $((e; f_1)\|(e; h_1)\|(g; h_1)\|\bar{f}_2\|\bar{h}_2) \vee ((e; f_2)\|(g; f_2)\|(g; h_1)\|\bar{f}_1\|\bar{h}_1)$ $\xrightarrow{e\|(e;h_1)\|(g;h_1)}_{4.1} f_1\|\nu\|\nu\|\bar{f}_2\|\bar{h}_2$ $(\{e, g, h_1\} \not\subseteq \{e, g, f_2, h_2, \bar{f}_1, \bar{h}_1\})$

Итак, $canon(E') \xrightarrow{G} \tilde{E}'$ — переход системы $TS(E')$, где $G = e\|(e; h_1)\|(g; h_1)$, $\tilde{E}' = f_1\|\bar{f}_2\|\bar{h}_2$. Таким образом, в $TS(E')$ из начального состояния может сработать ПЧУМ $\rho_G = \langle\{e, g, h_1\}, \prec_G, l_G\rangle$, где $e \prec_G h_1,\ g \prec_G h_1,\ l_G(e) = a,\ l_G(g) = c,\ l_G(h_1) = d$. В результате срабатывания этого ПЧУМ получается формула $\tilde{E}' = f_1\|\bar{f}_2\|\bar{h}_2$, содержащая информацию о том, что в данном поведении помеченного недетерминированного процесса, задаваемого формулой E', не смогли произойти события f_2 и h_2 из-за того, что случились альтернативные им события. Также видно, что в текущем состоянии, которое задается формулой $\tilde{E}'$, может случиться событие f_1. В результате мы придем в состояние, описываемое конечной формулой $\bar{f}_2\|\bar{h}_2$ системы $TS(E')$.

Определим денотационную семантику формулы E'.
$\mathcal{D}_{FL2}[E'] = \{\langle\{e, f_1, g, h_1, \bar{f}_2, \bar{h}_2\}, \prec_1, l\rangle, \langle\{e, f_2, g, h_2, \bar{f}_1, \bar{h}_1\}, \prec_2, l\rangle\}$,
$\mathcal{D}^{+}_{FL2}[E'] = \{\langle\{e, f_1, g, h_1\}, \prec_1, l_1\rangle, \langle\{e, f_2, g, h_2\}, \prec_2, l_2\rangle\}$, где $e \prec_1 f_1,\ e \prec_1 h_1,\ g \prec_1 h_1,\ e \prec_2 f_2,\ g \prec_2 f_2,\ g \prec_2 h_2,\ l(e) = l_1(e) = l_2(e) = a,\ l(f_1) = l_1(f_1) = l(f_2) = l_2(f_2) = b,\ l(g) = l_1(g) = l_2(g) = c,\ l(h_1) = l_1(h_1) = l(h_2) = l_2(h_2) = d$.

2.7 Взаимосвязь сетевых эквивалентностей и эквивалентностей алгебры $AFLP_2$

В [8] доказано, что любую конечную А-сеть можно представить формулой AFP_0 с помощью алгоритма регуляризации. Следовательно, любую конечную слабо помеченную А-сеть с помощью аналогичного алгоритма можно представить формулой $AFLP_0$. В предыдущем пункте построено отображение Ψ_L, сопоставляющее каждой формуле $AFLP_0$ формулу $AFLP_2$ и

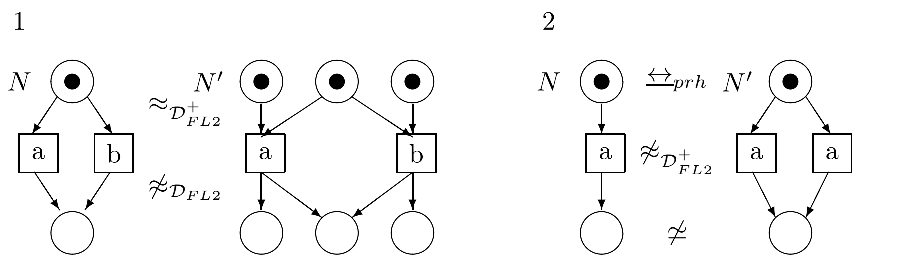

Рис. 4: Примеры взаимосвязи сетевых и формульных эквивалентностей на слабо помеченных А-сетях

сохраняющее совокупности ПЧУМ. Таким образом, любой конечной слабо помеченной А-сети N можно сопоставить формулу E алгебры $AFLP_2$ такую, что совокупность ПЧУМ начальных С-подсетей N совпадает с совокупностью ПЧУМ детерминированных процессов, задаваемых формулой E.

В таком случае очевидно, что понятия формульных эквивалентностей алгебры $AFLP_2$ можно расширить на сети. Если у нас имеется некоторая формульная эквивалентность, будем считать две сети эквивалентными тогда и только тогда, когда соответствующие им формулы эквивалентны.

Рассмотрим, как связаны сетевые и формульные эквивалентности. Очевидно, что $\approx_{\mathcal{D}^+_{FL2}}$ — следствие $\approx_{\mathcal{D}_{FL2}}$, так как $\approx_{\mathcal{D}^+_{FL2}}$ не учитывает несобытия и тупиковые события. Кроме того, $\underline{\leftrightarrow}_{pomh}$ — следствие $\approx_{\mathcal{D}^+_{FL2}}$, так как если $N \approx_{\mathcal{D}^+_{FL2}} N'$, то совокупности ПЧУМ, соответствующие этим сетям, совпадают (а не просто изоморфны).

- А-сетям N и N' на рисунке 4.1 соответствуют формулы $AFLP_2$ $E = e \bigtriangledown f$ и $E' = (e \bigtriangledown f)\|e\|f$, $lab(e) = a,\ lab(f) = b$. $N \approx_{\mathcal{D}^+_{FL2}} N'$, но $N \not\approx_{\mathcal{D}_{FL2}} N'$, так как $\mathcal{D}_{FL2}[E] = \{\langle\{e, \bar{f}\}, \emptyset, l\rangle, \langle\{f, \bar{e}\}, \emptyset, l\rangle\}$, а $\mathcal{D}_{FL2}[E'] = \{\langle\{e, \delta_f\}, \emptyset, l\rangle, \langle\{f, \delta_e\}, \emptyset, l\rangle\}$, где $l(e) = a,\ l(f) = b$. Следовательно, $\approx_{\mathcal{D}_{FL2}}$ — не следствие $\approx_{\mathcal{D}^+_{FL2}}$.

- Рассмотрим некоторые слабо помеченные А-сети N и N', различающиеся лишь именами переходов. Тогда $N \simeq N'$, но $N \not\approx_{\mathcal{D}^+_{FL2}} N'$, так как эквивалентность $\approx_{\mathcal{D}^+_{FL2}}$ учитывает конкретные имена переходов (события).

- А-сетям N и N' на рисунке 1.4 соответствуют формулы $AFLP_2$ $E = (e; f)\|e$ и $E' = e; f$, $lab(e) = a,\ lab(f) = b$. $N \approx_{\mathcal{D}_{FL2}} N'$, но $N \not\equiv_{pr} N'$. Поэтому ни одна из сетевых процессных эквивалентностей не является следствием никакой формульной эквивалентости $AFLP_2$.

Таким образом, взаимосвязь сетевых эквивалентностей с формульными эквивалентностями $AFLP_2$ может быть представлена графом на рисунке 5,

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \approx_{\mathcal{D}_{FL2}} \arrow[d] & \\
 & & & \approx_{\mathcal{D}^{+}_{FL2}} \arrow[d] & \simeq \arrow[d] \\
 & & \underline{\leftrightarrow}_{pwh} \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_{pomh} \arrow[l] \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_{prh} \arrow[l] \arrow[d] \\
 & \underline{\leftrightarrow}_{iST} \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_{pwST} \arrow[l] \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_{pomST} \arrow[l] \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_{prST} \arrow[l] \arrow[d] \\
\underline{\leftrightarrow}_{i} \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_{s} \arrow[l] \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_{pw} \arrow[l] \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_{pom} \arrow[l] \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_{pr} \arrow[l] \arrow[d] \\
\equiv_{i} & \equiv_{s} \arrow[l] & \equiv_{pw} \arrow[l] & \equiv_{pom} \arrow[l] & \equiv_{pr} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Рис. 5: Взаимосвязь сетевых эквивалентностей и эквивалентностей алгебры $AFLP_2$

в котором нельзя провести ни одной дополнительной нетривиальной стрелки.

2.8 Введение аналогов сетевых эквивалентностей на формулах $AFLP_2$

2.8.1 Процессные подформулы

Пусть E — формула $AFLP_2$. Определим *множество процессных подформул* формулы E следующим образом: $PSF(E) = \{canon(G) \mid G \in \mathbf{TS}(E)\} \cup \{\nu\}$. Из определения следует, что процессная подформула — либо пустая формула ν, либо нормальная конъюнкция, которая является дизъюнктивным членом формулы $canon(E)$ или префиксом некоторого дизъюнктивного члена $canon(E)$. Будем рассматривать процессные подформулы с точностью до изоморфизма. Так как процессные подформулы — нормальные конъюнкции, изоморфизм на них означает совпадение с точностью до перестановки конъюнктивных членов. Будем считать, что пустой формуле ν соответствует ПЧУМ $\rho_\nu = \langle \emptyset, \emptyset, \emptyset \rangle$.

Будем писать $G \xrightarrow{\hat{G}} \tilde{G}$, если $canon(E) \xrightarrow{H} E'$, $E' \xrightarrow{\hat{H}} E''$, $canon(E) \xrightarrow{\tilde{H}} E''$ — переходы $TS(E)$ и $G = canon(H)$, $\hat{G} = canon(\hat{H})$, $\tilde{G} = canon(\tilde{H})$. В этом случае процессная подформула $\tilde{G}$ — *расширение* процессной подформулы G на $\hat{G}$, а $\hat{G}$ — *расширяющая* процессная подформула. Положим для всех $G \in PSF(E)$ $\nu \xrightarrow{G} G$ и $G \xrightarrow{\nu} G$. Пишем $G \to \tilde{G}$, если $G \xrightarrow{\hat{G}} \tilde{G}$ для некоторой процессной подформулы $\hat{G}$.

$\tilde{G}$ — расширение G *на одно действие*, если $G \xrightarrow{\hat{G}} \tilde{G}$ и $G = e$, $e \in Ev$. В этом случае пишем $G \overset{e}{\to} \tilde{G}$ или $G \overset{a}{\to} \tilde{G}$, если $lab(e) = a \in Act$.

$\tilde{G}$ — расширение G *на мультимножество действий* или *шаг*, если

$G \xrightarrow{\hat{G}} \tilde{G}$ и $G = \|_{i=1}^n e_i$. В этом случае пишем $G \xrightarrow{U} \tilde{G}$ или $G \xrightarrow{A} \tilde{G}$, если $U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $A = \{lab(e_1), \ldots, lab(e_n)\} \in \mathcal{M}(Act)$ (здесь $\mathcal{M}(Act)$ — множество всех мультимножеств над Act).

Пусть $G \in PSF(E)$. Тогда G — *максимальная процессная подформула* формулы E, если ее нельзя расширить ни на одно действие. Обозначим *множество всех максимальных процессных подформул* формулы E через $PSF_{max}(E)$. Очевидно, $PSF_{max}(E) = \mathbf{TS_{max}}(E)$.

Заметим, что для формулы E', описывающей сеть N' на рисунке 1.5, $PSF_{max}(E') = \mathbf{TS_{max}}(E') = \{(e; f_1)\|(e; h_1)\|(g; h_1),\ (e; f_2)\|(g; f_2)\|(g; h_2)\}$.

2.8.2 Эквивалентности на следах

Интерливинговый след формулы E — это последовательность $a_1 \cdots a_n \in Act^*$ такая, что $\nu \xrightarrow{a_1} G_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_n} G_n$, где $G_i \in PSF(E)$ $(1 \le i \le n)$. Обозначим *множество всех интерливинговых следов* E через $SeqTraces(E)$. Две формулы E и E' *интерливингово эквивалентны*, обозначение $E \equiv_i E'$, если $SeqTraces(E) = SeqTraces(E')$.

Шаговый след формулы E — это последовательность $A_1 \cdots A_n \in (\mathcal{M}(Act))^*$ такая, что $\nu \xrightarrow{A_1} G_1 \xrightarrow{A_2} \ldots \xrightarrow{A_n} G_n$, где $G_i \in PSF(E)$ $(1 \le i \le n)$. Обозначим *множество всех шаговых следов* E через $StepTraces(E)$. Две формулы E и E' *шагово эквивалентны*, обозначение $E \equiv_s E'$, если $StepTraces(E) = StepTraces(E')$.

ЧУММ-след формулы E — это ЧУММ ρ — класс изоморфизма ρ_G для $G \in PSF(E)$. Пишем $\rho \sqsubseteq \rho'$, если $\rho_G \sqsubseteq \rho_{G'}$ для $\rho_G \in \rho$ и $\rho_{G'} \in \rho'$. В этом случае говорим, что ЧУММ ρ *менее последователен* или *более параллелен*, чем ρ'. Обозначим через $Pomsets(E)$ *множество всех следов ЧУММ* E. Две формулы E и E' *эквивалентны на частичных словах*, запись $E \equiv_{pw} E'$, если $Pomsets(E) \sqsubseteq Pomsets(E')$ и $Pomsets(E') \sqsubseteq Pomsets(E)$, то есть для любого $\rho' \in Pomsets(E')$ существует $\rho \in Pomsets(E)$ такой, что $\rho \sqsubseteq \rho'$ и наоборот. Две формулы E и E' *эквивалентны на ЧУММ*, обозначение $E \equiv_{pom} E'$, если $Pomsets(E) = Pomsets(E')$.

2.8.3 Бисимуляционные эквивалентности

Запись $\mathcal{R} : E \underline{\leftrightarrow}_\star E'$ будет означать, что $\mathcal{R}$ — бисимуляция типа $\star$ ($\star$-бисимуляция) между формулами E и E'. Формулы E и E' назовем $\star$-бисимуляционно эквивалентными, обозначение $E \underline{\leftrightarrow}_\star E'$, если $\mathcal{R} : E \underline{\leftrightarrow}_\star E'$ для некоторой $\star$-бисимуляции $\mathcal{R}$.

Обычные бисимуляции Пусть $\mathcal{R} \subseteq PSF(E) \times PSF(E')$.

$\mathcal{R}$ — *$\star$-бисимуляция* между E и E', $\star \in$\{ *интерливингивая, шаговая, на частичных словах, на ЧУММ*\}, запись $\mathcal{R} : E \underline{\leftrightarrow}_\star E'$, $\star \in \{i, s, pw, pom\}$, если:

1. $(\nu, \nu) \in \mathcal{R}$;

2. $(G, G') \in \mathcal{R}$, $G \xrightarrow{\hat{G}} \tilde{G}$,

(a) $|cont(\hat{G})| = 1$, если $\star = i$;

(b) $\prec_{\hat{G}} = \emptyset$, если $\star = s$;

тогда $\exists \tilde{G}' : \ G' \xrightarrow{\hat{G}'} \tilde{G}', \ (\tilde{G}, \tilde{G}') \in \mathcal{R}$ и

(a) $\rho_{\hat{G}'} \sqsubseteq \rho_{\hat{G}}$, если $\star = pw$;

(b) $\rho_{\hat{G}} \simeq \rho_{\hat{G}'}$, если $\star \in \{i, s, pom\}$.

3. Как предыдущий пункт, но роли E и E' меняются.

ST-процессные подформулы *ST-процессная подформула* формулы E — пара (G, H) такая, что $G, H \in PSF(E)$, $H \xrightarrow{K} G$ и $\forall e, f \in \rho_G \ e \prec_G f \ \Rightarrow \ e \in cont(H)$. В этом случае G — процессная подформула, которая начала работать, то есть все события G начали происходить. Процессная подформула H соответствует той части G, которая уже завершилась, а K — той части, которая еще работает. Очевидно, что $\prec_K = \emptyset$. $ST - PSF(E)$ обозначает *множество всех ST-процессных подформул* формулы E.

(ν, ν) будет *начальной ST-процессной подформулой.* Пусть (G, H), $(\tilde{G}, \tilde{H}) \in ST - PSF(E)$. Пишем $(G, H) \to (\tilde{G}, \tilde{H})$, если $G \to \tilde{G}$ и $H \to \tilde{H}$.

ST-бисимуляции Пусть $\mathcal{R} \subseteq ST - PSF(E) \times ST - PSF(E') \times \mathcal{B}$, где $\mathcal{B} = \{\beta \mid \beta : cont(G) \to cont(G'), \ G \in PSF(E), \ G' \in PSF(E')\}$.

$\mathcal{R}$ — *$\star$-ST-бисимуляция* между E и E', $\star \in \{$ *интерливингивая, на частичных словах, на ЧУММ*$\}$, запись $\mathcal{R} : E \underline{\leftrightarrow}_{\star ST} E'$, $\star \in \{i, pw, pom\}$, если:

1. $((\nu, \nu), (\nu, \nu), \emptyset) \in \mathcal{R}$;

2. $((G, H), (G', H'), \beta) \in \mathcal{R} \ \Rightarrow \ \beta : \rho_G \approx \rho_{G'}$ и $\beta(cont(H)) = cont(H')$;

3. $((G, H), (G', H'), \beta) \in \mathcal{R}, \ (G, H) \to (\tilde{G}, \tilde{H}) \ \Rightarrow \ \exists \tilde{\beta}, (\tilde{G}', \tilde{H}') : \ (G', H') \to (\tilde{G}', \tilde{H}'), \ \tilde{\beta}\lceil_{cont(G)} = \beta, \ ((\tilde{G}, \tilde{H}), (\tilde{G}', \tilde{H}'), \tilde{\beta}) \in \mathcal{R}$, и если $H \xrightarrow{K} \tilde{G}$, $H' \xrightarrow{K'} \tilde{G}'$, то:

   (a) $(\tilde{\beta}\lceil_{cont(K)})^{-1} : \rho_{K'} \sqsubseteq \rho_K$, если $\star = pw$;

   (b) $\tilde{\beta}\lceil_{cont(K)} : \rho_K \simeq \rho_{K'}$, если $\star = pom$;

4. Как предыдущий пункт, но роли E и E' меняются.

Сохраняющие историю бисимуляции Пусть $\mathcal{R} \subseteq PSF(E) \times PSF(E') \times \mathcal{B}$, где $\mathcal{B} = \{\beta \mid \beta : cont(G) \to cont(G'), \ G \in PSF(E), \ G' \in PSF(E')\}$.

$\mathcal{R}$ — *$\star$-сохраняющая историю бисимуляция* между E и E', $\star \in \{$ *на частичных словах, на ЧУММ*$\}$, запись $E \underline{\leftrightarrow}_{\star h} E'$, $\star \in \{pw, pom\}$, если:

1. $(\nu, \nu, \emptyset) \in \mathcal{R}$;

2. $(G, G', \beta) \in \mathcal{R} \;\Rightarrow\; \beta : \rho_G \approx \rho_{G'}$;
3. $(G, G', \beta) \in \mathcal{R},\ G \to \tilde{G} \;\Rightarrow\; \exists \tilde{\beta},\ \tilde{G}' : G' \to \tilde{G}',\ \tilde{\beta}\lceil_{cont(G)} = \beta$, $(\tilde{G}, \tilde{G}', \tilde{\beta}) \in \mathcal{R}$ и
   (a) $\tilde{\beta}^{-1} : \rho_{\tilde{G}'} \sqsubseteq \rho_{\tilde{G}}$, если $\star = pw$;
   (b) $\tilde{\beta} : \rho_{\tilde{G}} \simeq \rho_{\tilde{G}'}$, если $\star = pom$;
4. Как предыдущий пункт, но роли E и E' меняются.

2.8.4 Взаимосвязь сетевых эквивалентностей с их аналогами в $AFLP_2$

Пусть E — формула $AFLP_2$, соответствующая конечной слабо помеченной А-сети N. В пункте о взаимосвязи сетевых эквивалентностей с эквивалентностями алгебры $AFLP_2$ было установлено, что совокупность ПЧУМ начальных С-подсетей N совпадает с совокупностью ПЧУМ всех детерминированных процессов, описываемых формулой E.

Как было замечено в [4], множество максимальных С-подсетей конечной А-сети формирует множество ее максимальных процессов. Очевидно, что множество начальных С-подсетей формирует множество всех (не только максимальных) процессов конечной А-сети. Аналогичное утверждение справедливо для конечных слабо помеченных А-сетей. Таким образом, с точностью до изоморфизма можно считать, что множество процессов сети N, $\Pi(N)$, состоит из процессов вида $\pi = (C, id)$, где id — идентичное отображение над множеством $P_C \cup T_C$. Каждому такому процессу соответствует ПЧУМ $\rho_C = \langle T_C, \prec_C \cap (T_C \times T_C), l_C \rangle$.

С другой стороны, любому дизъюнктивному члену F формулы $canon(E)$ соответствует ПЧУМ одного из максимальных детерминированных процессов, описываемых этой формулой, $\rho^+_F = \langle cont^+(F), \prec^\star_F, l_F \rangle$. Тогда дизъюнктивным членам формулы $canon(E)$ и их префиксам будут соответствовать ПЧУМ всех (не только максимальных) детерминированных процессов, описываемых формулой E. Заметим, что для любого дизъюнктивного члена (или его префикса) F формулы $canon(E)$ существует процессная подформула $G \in PSF(E)$ такая, что $G \simeq F^+$ и $\rho^+_F = \rho_{F^+} = \rho_G$.

Таким образом, $\{\rho_C \mid \pi = (C, id) \in \Pi(N)\} \{\rho_G \mid G \in PSF(E)\}$.

Покажем, что ПЧУМы определяют с точностью до изоморфизма как процессы сети N, так и процессные подформулы формулы E.

1. Определим отображение χ_1 из $\Pi(N)$ в совокупность ПЧУМ следующим образом. Пусть $\pi = (C, id) \in \Pi(N)$. Тогда положим $\chi_1(\pi) = \rho_C$. Очевидно, что каждому процессу соответствует только одно ПЧУМ. Следовательно, χ_1 — функция. По определению она сюръективна. Кроме того, каждый процесс $\pi = (C, id) \in \Pi(N)$ однозначно определяется своей С-сетью C. А сеть C является начальной С-подсетью N, и, следовательно, однозначно определяется множеством своих переходов

T_C. Значит, никаким двум разным процессам из $\Pi(N)$ не соответствует одно ПЧУМ. Тогда χ_1 — биекция.

2. Определим отображение χ_2 из $PSF(E)$ в совокупность ПЧУМ следующим образом. Пусть $G \in PSF(E)$. Тогда положим $\chi_2(G) = \rho_G$. Очевидно, что каждой процессной подформуле соответствует только одно ПЧУМ. Следовательно, χ_2 — функция. По определению она сюръективна. Кроме того, никаким двум разным (не изоморфным) процессным подформулам не соответствует одно ПЧУМ, так как эти подформулы — нормальные конъюнкции, которые являются, по существу, представлением ПЧУМ (если учесть информацию о пометке событий, входящих в эти подформулы). Тогда χ_2 — биекция.

Пусть $\chi = \chi_2^{-1} \circ \chi_1$. Тогда $\chi : \Pi(N) \to PSF(E)$ — биекция, сохраняющая ПЧУМы, то есть если $\chi(\pi) = G,\ \pi = (C, id)$, то $\rho_C = \rho_G$.

Утверждение 2 *Пусть E — формула $AFLP_2$, соответствующая конечной слабо помеченной A-сети N. Тогда $\forall \pi, \pi' \in \Pi(N)\ \pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi} \Leftrightarrow \chi(\pi) \xrightarrow{\chi(\hat{\pi})} \chi(\tilde{\pi})$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что определения расширений процессов и процессных подформул основаны на следующем правиле расширений для ПЧУМ. Пусть $\rho = \langle X, \prec, l\rangle,\ \tilde{\rho} = \langle \tilde{X}, \tilde{\prec}, \tilde{l}\rangle,\ \hat{\rho}$ — ПЧУМ. Тогда $\tilde{\rho}$ — *расширение ρ на $\hat{\rho}$*, запись $\rho \xrightarrow{\hat{\rho}} \tilde{\rho}$, если $\rho \lhd \tilde{\rho}$ и $\hat{\rho} = \tilde{\rho}\lceil_{\tilde{X} \setminus X}$. □

Теорема 4 *Пусть E — формула $AFLP_2$, соответствующая конечной слабо помеченной A-сети N, а E' — формула $AFLP_2$, соответствующая конечной слабо помеченной A-сети N'. Тогда $N \leftrightarrow_\star N' \Leftrightarrow E \leftrightarrow_\star E'$, где $\leftrightarrow \in \{\equiv, \underline{\leftrightarrow}\},\ \star \in \{i, s, pw, pom, iST, pwST, pomST, pwh, pomh\}$.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $N \equiv_\star N',\ \star \in \{i, s, pw, pom\}$. След сети N [15, 16] преобразуется в след формулы E заменой каждого процесса $\pi \in \Pi(N)$ на процессную подформулу G такую, что $\chi(\pi) = G$. Аналогично получаются следы формулы E'. Очевидно, что полученные множества следов формул E и E' совпадают и $E \equiv_\star E'$.

Если $\mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_\star N',\ \star \in \{i, s, pw, pom, iST, pwST, pomST, pwh, pomh\}$, то $\mathcal{S} : E \underline{\leftrightarrow}_\star E'$, где отношение $\mathcal{S}$ определяется следующим образом.

Обычные бисимуляции $(\pi, \pi') \in \mathcal{R} \Leftrightarrow (\chi(\pi), \chi'(\pi')) \in \mathcal{S}$;

ST-бисимуляции $((\pi_E, \pi_P), (\pi'_E, \pi'_P), \beta) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow$
$((\chi(\pi_E), \chi(\pi_P)), (\chi'(\pi'_E), \chi'(\pi'_P)), \chi' \circ \beta \circ \chi^{-1}) \in \mathcal{S}$.

Сохраняющие историю бисимуляции $(\pi, \pi', \beta) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow$
$(\chi(\pi), \chi'(\pi'), \chi' \circ \beta \circ \chi^{-1}) \in \mathcal{S}$.

$\Leftarrow$ Как предыдущий пункт, но с использованием χ^{-1} и $(\chi')^{-1}$ вместо χ и χ' соответственно. □

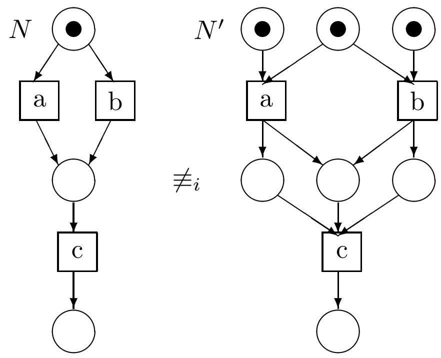

Рис. 6: A-сети из примера на конгруэнтность

Очевидно, взаимосвязь формульных эквивалентностей и аналогов сетевых эквивалентностей в алгебре $AFLP_2$ изображается графом на рисунке 5, из которого удалены процессные эквивалентности (так как они не выразимы в терминах процессных алгебр).

После определения аналогов сетевых эквивалентностей на формулах $AFLP_2$ возникает вопрос, является ли какой-либо из таких аналогов конгруэнтностью относительно операций этой алгебры? Рассмотрим формулы $E = e \bigtriangledown f$ и $E' = (e \bigtriangledown f)\|e\|f$. Пусть $lab(e) = a,\ lab(f) = b,\ lab(g) = c$. Имеем $E \approx_{\mathcal{D}^+_{FL2}} E'$, но $E; g \not\equiv_i E'; g$, так как $PSF(E; g) = \{\nu, e, f, (e; g), (f; g)\}$, а $PSF(E'; g) = \{\nu, e, f\}$. Поэтому $SeqTraces(E; g) = \{a, b, ac, bc\}$, тогда как $SeqTraces(E'; g) = \{a, b\}$. Следовательно, никакая из рассмотренных эквивалентностей на формулах $AFLP_2$, за исключением $\approx_{\mathcal{D}_{FL2}}$, не является конгруэнтностью, то есть $\approx_{\mathcal{D}_{FL2}}$ — самая слабая эквивалентность, которая является конгруэнтностью.

Заметим, что формулы $E; g$ и $E'; g$ соответствуют A-сетям N и N' на рисунке 6. Мы доказали согласованность эквивалентностей на сетях с их аналогами на формулах $AFLP_2$. Следовательно, тот факт, что $E; g \not\equiv_i E'; g$, можно установить, рассматривая сети N и N', для которых $N \not\equiv_i N'$, так как в N', в отличие от N, действие c никогда не сможет сработать.

3 Заключение

Итак, в данной работе предложена новая алгебра $AFLP_2$ для описания и исследования свойств помеченных недетеминированных параллельных процессов. Предложены денотационная и операционная семантики и формульные эквивалентности на их основе. Рассмотрена взаимосвязь сетевых и формульных эквивалентностей на слабо помеченных A-сетях. На формулах $AFLP_2$ введены аналоги сетевых эквивалентностей, согласованные с исходными эквивалентностями на сетях Петри. Таким образом, алгебра

$AFLP_2$ обладает достаточно мощными средствами для работы с недетерминированными конечными процессами.

Дальнейшим развитием данной темы могло бы служить введение оператора рекурсии в $AFLP_2$ (как было предложено в [4] для AFP_2), что дало бы возможность описывать не только конечные, но и бесконечные процессы. Работа в данном направлении сейчас ведется автором.

Благодарности Автор выражает признательность И.Б. Вирбицкайте за предложение по введению эквивалентностей на формулах AFP_2, инициировавшее создание алгебры $AFLP_2$, и за множество полезных обсуждений, которые сыграли значительную роль в улучшении первоначального варианта данной работы.

Список литературы

[1] Autant C., Schnoebelen Ph. *Place bisimulations in Petri nets.* LNCS 616, p. 45–61, June 1992.

[2] Boudol G., Castellani I. *On the semantics of concurrency: partial orders and transition systems.* LNCS 249, p. 123–137, 1987.

[3] Boudol G., Castellani I. *Concurrency and atomicity.* TCS 59, p. 25–84, 1988.

[4] Cherkasova L.A. *Posets with non-actions: A model for concurrent nondeterministic processes.* Arbeitspapiere der GMD 403, 68 p., July 1989.

[5] Cherkasova L.A. *Algebra AFP_2 for concurrent nondeterministic processes: Fully abstract model and complete axiomatization.* Reihe Informatik 72, 28 p., July 1990.

[6] van Glabbeek R.J., Vaandrager F. *Petri net models for algebraic theories of concurrency.* LNCS 259, p. 224–242, 1987.

[7] Kotov V.E., Cherkasova L.A. *On structural properties of generalized processes.* LNCS 188, p. 288–306, 1985.

[8] Kotov V.E. *An algebra for parallelism based on Petri nets.* LNCS 64, p. 39–55, 1978.

[9] Котов В.Е. *Сети Петри.* Москва. Наука, 160 с., 1984.

[10] Milner R.A.J. *A calculus of communicating systems.* LNCS 92, p. 172–180, 1980.

[11] Nielsen M., Thiagarajan P.S. *Degrees of non-determinizm and concurrency: A Petri net view.* LNCS 181, p. 89–117, December 1984.

[12] Park D. *Concurrency and automata on infinite sequences.* LNCS 104, p. 167–183, March 1981.

[13] Pomello L. *Some equivalence notions for concurrent systems. An overview.* LNCS 222, p. 381–400, 1986.

[14] Rabinovitch A., Trakhtenbrot B.A. *Behaviour structures and nets.* Fundamenta Informaticae XI, p. 357–404, 1988.

[15] Tarasyuk I.V. *Equivalences on Petri nets.* In: Specification, Verification and Net Models of Concurrent Systems. Institute of Informatics Systems, Novosibirsk, 1994, to appear.

[16] Tarasyuk I.V. *An investigation of equivalence notions on some subclasses of Petri nets.* Bulletin of Novosibirsk Computing Center (Computer Science) 3, 1995, to appear.

[17] Vogler W. *Bisimulation and action refinement.* LNCS 480, p. 309–321, 1991.