Понятия эквивалентностей для разработки параллельных систем с использованием сетей Петри *

Игорь В. Тарасюк

Институт систем информатики СО РАН,
пр. Лаврентьева 6, 630090, Новосибирск, Россия
E-mail: itar@iis.nsk.su

Аннотация

Работа посвящена исследованию поведенческих эквивалентностей параллельных систем, моделируемых сетями Петри. Основные эквивалентностные понятия, известные из литературы, дополнены новыми и исследованы как на всем классе сетей Петри, так и на подклассе последовательных сетей (сети без параллелизма). Получена полная картина взаимосвязей между рассмотренными эквивалентностями. Также изучен вопрос сохранения эквивалентностных понятий при выполнении операции "детализации" (refinement), позволяющей рассматривать поведение сетей на более низком уровне абстракции.

1 Введение

Сети Петри — популярная формальная модель для разработки параллельных и распределенных систем. Как известно, одно из основных достоинств сетей Петри — возможность структурной характеризации трех фундаментальных аспектов параллельных вычислений: причинной зависимости, недетерминизма и параллелизма.

За последние годы в теории параллелизма введено большое число семантических эквивалентностей. Многие из них были либо непосредственно определены, либо перенесены с других моделей на сети Петри. Из литературы известны следующие основные понятия эквивалентностей.

- *Следовые эквивалентности* (учитывают только протоколы функционирования систем): интерливинговая [7], шаговая [10], частично упорядоченных мультимножеств (ЧУММ) [6].
- *Обычные бисимуляционные эквивалентности* (учитывают ветвистую структуру функционирования систем): интерливинговая [9], шаговая [8], частичных слов (ЧС) [14], ЧУММ [4] и процессная [1].
- *ST-бисимуляционные эквивалентности* (учитывают длительность срабатывания переходов при функционировании систем): интерливинговая [6], частичных слов [14] и ЧУММ [14].
- *Сохраняющие историю бисимуляционные эквивалентности* (учитывают "прошлое" (историю) функционирования систем): была введена ЧУММ-эквивалентность [11].
- *Сохраняющие конфликт эквивалентности* (полностью учитывают конфликты в системах): была рассмотрена О-процессная эквивалентность [6].
- *Изоморфизм* (то есть совпадение систем с точностью до переименования их компонент).

При разработке параллельных систем по методу "сверху-вниз" используется оператор *детализации (refinement)*, после применения которого некоторые элементарные компоненты систем приобретают внутреннюю структуру, то есть появляется возможность рассматривать такие системы на более низком уровне абстракции. В работе [3] был предложен оператор *SM-детализации* для сетей Петри, заменяющий их переходы на SM-сети, которые являются специальным подклассом автоматных сетей.

*Работа поддерживается Фондом Фольксваген, грант I/70 564, ИНТАС-РФФИ, грант 95-0378 и Фондом Поддержки Проектов Молодых Ученых СО РАН

В данной работе с целью получения полного набора эквивалентностей для сетей Петри в дополнение к известным понятиям вводится ряд новых: следовые эквивалентности частичных слов и процессов, ST-бисимуляционная и сохраняющая историю процессные бисимуляционные эквивалентности, а также эквивалентность на мультиструктурах событий. Устанавливаются взаимосвязи между новыми и известными из литературы понятиями эквивалентностей как на всем классе сетей Петри, так и на подклассе последовательных сетей (где невозможно параллельное срабатывание переходов). Кроме того, все рассмотренные поведенческие эквивалентности проверены на сохранение при SM-детализациях.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 приводятся основные определения. В разделе 3 вводятся понятия поведенческих эквивалентностей. Раздел 4 посвящен исследованию эквивалентностей на всем классе сетей Петри, а раздел 5 — на подклассе последовательных сетей. Сохранение понятий эквивалентностей при детализациях исследуется в разделе 6. Заключительный раздел 7 содержит краткий обзор полученных результатов и направлений дальнейших исследований.

2 Основные определения

В данном разделе приводятся базисные определения, используемые в работе.

2.1 Мультимножества

Определение 2.1 *Пусть X — некоторое множество. Конечное* мультимножество *M над X — отображение $M : X \to \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ обозначает множество натуральных чисел) такое, что $|\{x \in X \mid M(x) > 0\}| < \infty$.*

Обозначим через $\mathcal{M}(X)$ *множество всех конечных мультимножеств* над X. Когда $\forall x \in X\ M(x) \leq 1$, M — обычное множество. *Мощность* мультимножества M определяется так: $|M| = \sum_{x \in X} M(x)$. Пишем $x \in M$, если $M(x) > 0$, и $M_1 \subseteq M_2$, если $\forall x \in X\ M_1(x) \leq M_2(x)$. Определим $(M_1 + M_2)(x) = M_1(x) + M_2(x)$ и $(M_1 - M_2)(x) = \max\{0, M_1(x) - M_2(x)\}$.

2.2 Помеченные сети

Определение 2.2 *Пусть $Act = \{a, b, \ldots\}$ — множество* действий *или* меток. Помеченная сеть *— четверка $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N \rangle$, где:*

- $P_N = \{p, q, \ldots\}$ *— множество* мест*;*
- $T_N = \{u, v, \ldots\}$ *— множество* переходов*;*
- $F_N : (P_N \times T_N) \cup (T_N \times P_N) \to \mathbf{N}$ — отношение инцидентности *с весами;*
- $l_N : T_N \to Act$ — пометка *переходов действиями.*

Пусть $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N \rangle$ и $N' = \langle P_{N'}, T_{N'}, F_{N'}, l_{N'} \rangle$ — помеченные сети. Отображение $\beta : P_N \cup T_N \to P_{N'} \cup T_{N'}$ — *изоморфизм* между N и N', обозначение $\beta : N \simeq N'$, если β — биекция такая, что $\beta(P_N) = P_{N'}$, $\beta(T_N) = T_{N'}$ и $\forall p \in P_N\ \forall t \in T_N\ F_N(p,t) = F_{N'}(\beta(p), \beta(t)),\ F_N(t,p) = F_{N'}(\beta(t), \beta(p))$, а также $\forall t \in T_N\ l_N(t) = l_{N'}(\beta(t))$. Помеченные сети N и N' *изоморфны*, обозначение $N \simeq N'$, если $\exists \beta : N \simeq N'$.

Для помеченной сети N и ее перехода $t \in T_N$, *предусловие* и *постусловие* t, обозначение соответственно ${}^\bullet t$ и $t^\bullet$, — мультимножества, определяемые следующим образом: $({}^\bullet t)(p) = F_N(p,t)$ и $(t^\bullet)(p) = F_N(t,p)$. Аналогичные определения вводятся для мест: $({}^\bullet p)(t) = F_N(t,p)$ и $(p^\bullet)(t) = F_N(p,t)$. Обозначим через ${}^\circ N = \{p \in P_N \mid {}^\bullet p = \emptyset\}$ множество *входных* мест N и через $N^\circ = \{p \in P_N \mid p^\bullet = \emptyset\}$ — множество *выходных* мест N.

Помеченная сеть N — *ациклическая*, если не существует последовательности $t_0, \ldots, t_n \in T_N$ такой, что $t_{i-1}^\bullet \cap {}^\bullet t_i \neq \emptyset\ (1 \leq i \leq n)$ и $t_0 = t_n$. Помеченная сеть N — *ординарная*, если $\forall p \in P_N\ {}^\bullet p$ и $p^\bullet$ — множества (а не мультимножества).

Пусть $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N \rangle$ — ациклическая ординарная помеченная сеть и $x, y \in P_N \cup T_N$. Введем следующие понятия.

- $x \prec_N y \ \Leftrightarrow\ x F_N^+ y$, где F_N^+ — транзитивное замыкание F_N (отношение *строгой причинной зависимости*);
- $x \preceq_N y \ \Leftrightarrow\ (x \prec_N y) \vee (x = y)$ (отношение *причинной зависимости*);
- $x \#_N y \ \Leftrightarrow\ \exists t, u \in T_N\ (t \neq u,\ {}^\bullet t \cap {}^\bullet u \neq \emptyset,\ t \preceq_N x,\ u \preceq_N y)$ (отношение *конфликта*);

- $\downarrow_N x = \{y \in P_N \cup T_N \mid y \prec_N x\}$ (множество *строгих предшественников* x).

Множество $T \subseteq T_N$ *замкнуто влево* в N, если $\forall t \in T$ $(\downarrow_N t) \cap T_N \subseteq T$. Множество T *безконфликтно* в N, если $\forall t, u \in T$ $\neg(t \#_N u)$. Множество T — *конфигурация* в N, если оно конечно, замкнуто влево и безконфликтно в N.

2.3 Маркированные сети

Определение 2.3 Маркировка *помеченной сети* N *— мультимножество* $M \in \mathcal{M}(P_N)$. (Маркированная) сеть *— пятерка* $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N, M_N\rangle$*, где* $\langle P_N, T_N, F_N, l_N\rangle$ *— помеченная сеть и* $M_N \in \mathcal{M}(P_N)$ — начальная *маркировка.*

Пусть $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N, M_N\rangle$ и $N' = \langle P_{N'}, T_{N'}, F_{N'}, l_{N'}, M_{N'}\rangle$ — маркированные сети. Отображение $\beta : P_N \cup T_N \to P_{N'} \cup T_{N'}$ — *изоморфизм* между N и N', обозначение $\beta : N \simeq N'$, если $\beta : \langle P_N, T_N, F_N, l_N\rangle \simeq \langle P_{N'}, T_{N'}, F_{N'}, l_{N'}\rangle$ и $\forall p \in M_N$ $M_N(p) = M_{N'}(\beta(p))$. Сети N и N' *изоморфны*, обозначение $N \simeq N'$, если $\exists \beta : N \simeq N'$.

Пусть $M \in \mathcal{M}(P_N)$ — маркировка сети N. Переход $t \in T_N$ *допустим* в M, если ${}^\bullet t \subseteq M$. Если t допустим в M, в результате его срабатывания получается новая маркировка $\widetilde{M} = M - {}^\bullet t + t^\bullet$, обозначение $M \xrightarrow{t} \widetilde{M}$. Маркировка M сети N — *достижимая*, если $M = M_N$ или существует достижимая маркировка $\widehat{M}$ сети N такая, что $\widehat{M} \xrightarrow{t} M$ для некоторого $t \in T_N$. $Mark(N)$ обозначает множество *всех достижимых маркировок* сети N.

2.4 Частично упорядоченные множества

Определение 2.4 Помеченное частично упорядоченное множество (ПЧУМ) *— тройка* $\rho = \langle X, \prec, l\rangle$*, где:*

- $X = \{x, y, \ldots\}$ *— множество* событий*;*
- $\prec \subseteq X \times X$ *— строгий частичный порядок, отношение* причинной зависимости*;*
- $l : X \to Act$ *— функция* пометки.

Пусть $\rho = \langle X, \prec, l\rangle$ — ПЧУМ и $x \in X$. Тогда $\downarrow x = \{y \in X \mid y \prec x\}$ — множество *строгих предшественников* x.

Пусть $\rho = \langle X, \prec, l\rangle$ и $\rho' = \langle X', \prec', l'\rangle$ — ПЧУМ.

Отображение $\beta : X \to X'$ — *сохраняющая пометку биекция* между ρ и ρ', обозначение $\beta : \rho \approx \rho'$, если β — биекция такая, что $\forall x \in X$ $l(x) = l'(\beta(x))$. Пишем $\rho \approx \rho'$, если $\exists \beta : \rho \approx \rho'$.

Отображение $\beta : X \to X'$ — *гомоморфизм* между ρ и ρ', обозначение $\beta : \rho \sqsubseteq \rho'$, если $\beta : \rho \approx \rho'$ и $\forall x, y \in X$ $x \prec y \Rightarrow \beta(x) \prec' \beta(y)$. Пишем $\rho \sqsubseteq \rho'$, если $\exists \beta : \rho \sqsubseteq \rho'$.

Отображение $\beta : X \to X'$ — *изоморфизм* между ρ и ρ', обозначение $\beta : \rho \simeq \rho'$, если $\beta : \rho \sqsubseteq \rho'$ и $\beta^{-1} : \rho' \sqsubseteq \rho$. ПЧУМ ρ и ρ' *изоморфны*, обозначение $\rho \simeq \rho'$, если $\exists \beta : \rho \simeq \rho'$.

Определение 2.5 Частично упорядоченное мультимножество (ЧУММ) *— класс изоморфизма ПЧУМ.*

2.5 Структуры событий

Определение 2.6 Помеченная структура событий (ПСС) *— четверка* $\xi = \langle X, \prec, \#, l\rangle$*, где:*

- $X = \{x, y, \ldots\}$ *— множество* событий*;*
- $\prec \subseteq X \times X$ *— строгий частичный порядок, отношение* причинной зависимости*, удовлетворяющее принципу* конечности причин*:* $\forall x \in X$ $|\downarrow x| < \infty$*;*
- $\# \subseteq X \times X$ *— иррефлексивное симметричное отношение* конфликта*, удовлетворяющее принципу* наследования конфликта*:* $\forall x, y, z \in X$ $x \# y \prec z \Rightarrow x \# z$*;*
- $l : X \to Act$ *— функция* пометки.

Пусть $\xi = \langle X, \prec, \#, l\rangle$ и $\xi' = \langle X', \prec', \#', l'\rangle$ — ПСС. Отображение $\beta : X \to X'$ — *изоморфизм* между ξ и ξ', обозначение $\beta : \xi \simeq \xi'$, если $\beta : \langle X, \prec, l\rangle \simeq \langle X', \prec', l'\rangle$ и $\forall x, y \in X$ $x \# y \Leftrightarrow \beta(x) \#' \beta(y)$. ПСС ξ и ξ' *изоморфны*, обозначение $\xi \simeq \xi'$, если $\exists \beta : \xi \simeq \xi'$.

Определение 2.7 Мультиструктура событий (МСС) *— класс изоморфизма ПСС.*

2.5.1 С-процессы

С-процесс — это процесс на основе С-сети [2].

Определение 2.8 С-сеть — *ациклическая ординарная помеченная сеть* $C = \langle P_C, T_C, F_C, l_C \rangle$, *такая, что:*

1. $\forall r \in P_C \; |{}^\bullet r| \leq 1$ *и* $|r^\bullet| \leq 1$, *то есть места не ветвятся;*

2. $|\downarrow_C x| < \infty$, *то есть множество причин конечно.*

Заметим, что любой С-сети $C = \langle P_C, T_C, F_C, l_C \rangle$ соответствует ПЧУМ $\rho_C = \langle T_C, \prec_N \cap (T_C \times T_C), l_C \rangle$. Фундаментальное свойство С-сетей [1]: если C — С-сеть, тогда существует последовательность переходов ${}^\circ C = L_0 \xrightarrow{v_1} \cdots \xrightarrow{v_n} L_n = C^\circ$ такая, что $L_i \subseteq P_C$ $(0 \leq i \leq n)$, $P_C = \cup_{i=0}^{n} L_i$ и $T_C = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Такая последовательность называется *полным выполнением* C.

Определение 2.9 *Даны сеть* N *и С-сеть* C. *Отображение* $\varphi : P_C \cup T_C \to P_N \cup T_N$ — встраивание C *в* N, *обозначение* $\varphi : C \to N$, *если:*

1. $\varphi(P_C) \in \mathcal{M}(P_N)$ *и* $\varphi(T_C) \in \mathcal{M}(T_N)$, *то есть сохраняются типы элементов сетей;*

2. $\forall v \in T_C \; {}^\bullet\varphi(v) = \varphi({}^\bullet v)$ *и* $\varphi(v)^\bullet = \varphi(v^\bullet)$, *то есть учитывается отношение инцидентности;*

3. $\forall v \in T_C \; l_C(v) = l_N(\varphi(v))$, *то есть сохраняется пометка.*

Так как встраивания учитывают отношение инцидентности, если ${}^\circ C \xrightarrow{v_1} \cdots \xrightarrow{v_n} C^\circ$ — полное выполнение C, то $M = \varphi({}^\circ C) \xrightarrow{\varphi(v_1)} \cdots \xrightarrow{\varphi(v_n)} \varphi(C^\circ) = \widetilde{M}$ — последовательность переходов в N, обозначение $M \xrightarrow{C,\varphi} \widetilde{M}$.

Определение 2.10 С-процесс (процесс), допустимый в маркировке M *сети* N — *пара* $\pi = (C, \varphi)$, *где* C — *С-сеть и* $\varphi : C \to N$ — *встраивание такое, что* $M = \varphi({}^\circ C)$. *Допустимый в* M_N *процесс* — процесс N.

Обозначим множество всех *процессов, допустимых в маркировке* M сети N через $\Pi(N, M)$ и множество всех *процессов* сети N через $\Pi(N)$. *Начальный* процесс сети N — процесс $\pi_N = (C_N, \varphi_N) \in \Pi(N)$, такой, что $T_{C_N} = \emptyset$. Если $\pi \in \Pi(N, M)$, то выполнение этого процесса преобразует маркировку M в $\widetilde{M} = M - \varphi({}^\circ C) + \varphi(C^\circ) = \varphi(C^\circ)$, обозначение $M \xrightarrow{\pi} \widetilde{M}$.

Пусть $\pi = (C, \varphi)$, $\tilde{\pi} = (\widetilde{C}, \tilde{\varphi}) \in \Pi(N)$, $\hat{\pi} = (\widehat{C}, \hat{\varphi}) \in \Pi(N, \varphi(C^\circ))$. Процесс π — *префикс* процесса $\tilde{\pi}$, если $T_C \subseteq T_{\widetilde{C}}$ — замкнутое влево множество в $\widetilde{C}$. Процесс $\hat{\pi}$ — *суффикс* процесса $\tilde{\pi}$, если $T_{\widehat{C}} = T_{\widetilde{C}} \setminus T_C$. Тогда $\tilde{\pi}$ — *расширение* π *на процесс* $\hat{\pi}$, а $\hat{\pi}$ — *расширяющий* процесс для π, запись $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$. Пишем $\pi \to \tilde{\pi}$, если $\exists \hat{\pi} \; \pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$.

Процесс $\tilde{\pi}$ — расширение π *на одно действие*, запись $\pi \xrightarrow{v} \tilde{\pi}$ или $\pi \xrightarrow{a} \tilde{\pi}$, если $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$, $T_{\widehat{C}} = \{v\}$ и $l_{\widehat{C}}(v) = a$.

Процесс $\tilde{\pi}$ — расширение π *на мультимножество действий* или *шаг*, запись $\pi \xrightarrow{V} \tilde{\pi}$ или $\pi \xrightarrow{A} \tilde{\pi}$, если $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$, $\prec_{\widehat{C}} = \emptyset$, $T_{\widehat{C}} = V$ и $l_{\widehat{C}}(V) = A$.

2.5.2 О-процессы

О-процесс — это процесс на основе О-сети (ветвистый процесс, в терминах [5]).

Определение 2.11 О-сеть — *ациклическая ординарная помеченная сеть* $O = \langle P_O, T_O, F_O, l_O \rangle$, *такая, что:*

1. $\forall r \in P_O \; |{}^\bullet r| \leq 1$, *то есть нет прямого конфликта;*

2. $\forall x \in P_O \cup T_O \; \neg(x \#_O x)$, *то есть отношение конфликта иррефлексивно;*

3. $\forall x \in P_O \cup T_O \; |\downarrow_O x| < \infty$, *то есть множество причин конечно.*

Заметим, что любой О-сети $O = \langle P_O, T_O, F_O, l_O \rangle$ соответствует ПСС $\xi_O = \langle T_O, \prec_O \cap (T_O \times T_O), \#_O \cap (T_O \times T_O), l_O \rangle$.

Определение 2.12 *Пусть* $O = \langle P_O, T_O, F_O, l_O \rangle$ — *О-сеть и* $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N, M_N \rangle$ — *некоторая сеть. Отображение* $\psi : P_O \cup T_O \to P_N \cup T_N$ — встраивание O *в* N, *обозначение* $\psi : O \to N$, *если:*

1. $\psi(P_O) \in \mathcal{M}(P_N)$ *и* $\psi(T_O) \in \mathcal{M}(T_N)$, *то есть сохраняются типы элементов сетей;*

2. $\forall v \in T_O\ l_O(v) = l_N(\psi(v))$, *то есть сохраняется пометка;*

3. $\forall v \in T_O\ {}^\bullet\psi(v) = \psi({}^\bullet v)$ *и* $\psi(v)^\bullet = \psi(v^\bullet)$, *то есть учитывается отношение инцидентности;*

4. $\forall v, w \in T_O\ ({}^\bullet v = {}^\bullet w) \wedge (\psi(v) = \psi(w)) \Rightarrow\ v = w$, *то есть нет "лишних" конфликтов.*

Определение 2.13 О-процесс *сети* N *— пара* $\varpi = (O, \psi)$, *где* O *— О-сеть, а* $\psi : O \to N$ *— встраивание такое, что* $M_N = \psi({}^\circ O)$.

Обозначим множество всех *О-процессов* сети N через $\wp(N)$. *Начальный* О-процесс сети N совпадает с начальным С-процессом, то есть $\varpi_N = \pi_N$.

Пусть $\varpi = (O, \psi)$, $\tilde{\varpi} = (\widetilde{O}, \tilde{\psi}) \in \wp(N)$. О-процесс ϖ — *префикс* О-процесса $\tilde{\varpi}$, если $T_O \subseteq T_{\widetilde{O}}$ — замкнутое влево множество в $\widetilde{O}$. Тогда $\tilde{\varpi}$ — *расширение* О-процесса ϖ, обозначение $\varpi \to \tilde{\varpi}$. Пусть $\pi = (C, \varphi) \in \Pi(N)$, $\varpi = (O, \psi) \in \wp(N)$. С-процесс π — *вычисление* О-процесса ϖ, если $T_C \subseteq T_O$ — конфигурация в O.

О-процесс ϖ сети N — *максимальный*, если $\forall \tilde{\varpi} = (\widetilde{O}, \tilde{\psi}) \in \wp(N)$ таких, что $\varpi \to \tilde{\varpi}$ выполняется $T_{\widetilde{O}} \setminus T_O = \emptyset$. Обозначим множество всех *максимальных О-процессов* сети N через $\wp_{max}(N)$. Заметим, что $\wp_{max}(N)$ состоит из единственного О-процесса вида $\varpi_{max} = (O_{max}, \psi_{max})$. В этом случае класс изоморфизма О-сети O_{max} — *развертка* сети N, обозначение $\mathcal{U}(N)$. Развертке $\mathcal{U}(N)$ соответствует МСС $\mathcal{E}(N) = \xi_{\mathcal{U}(N)}$ — класс изоморфизма ПСС ξ_O для $O \in \mathcal{U}(N)$.

3 Эквивалентностные понятия

В данном разделе рассматриваются как известные из литературы, так и новые эквивалентностные понятия для сетей Петри.

3.1 Следовые эквивалентности

Следовые эквивалентности учитывают только протоколы функционирования сетей, и не принимают во внимание момент недетерминированного выбора между несколькими расширениями процесса. Поэтому их называют эквивалентностями *линейного времени.*

Определение 3.1 Интерливинговый след *сети* N *— последовательность* $a_1 \cdots a_n \in Act^*$ *такая, что* $\pi_N \stackrel{a_1}{\to} \pi_1 \stackrel{a_2}{\to} \ldots \stackrel{a_n}{\to} \pi_n$, *где* $\pi_i \in \Pi(N)$ $(1 \le i \le n)$. $IntTraces(N)$ *обозначает* множество всех интерливинговых следов N. *Сети* N *и* N' интерливингово следово эквивалентны, *обозначение* $N \equiv_i N'$, *если* $IntTraces(N) = IntTraces(N')$.

Определение 3.2 Шаговый след *сети* N *— последовательность* $A_1 \cdots A_n \in (\mathcal{M}(Act))^*$ *такая, что* $\pi_N \stackrel{A_1}{\to} \pi_1 \stackrel{A_2}{\to} \ldots \stackrel{A_n}{\to} \pi_n$, *где* $\pi_i \in \Pi(N)$ $(0 \le i \le n)$. $StepTraces(N)$ *обозначает* множество всех шаговых следов N. *Сети* N *и* N' шагово следово эквивалентны, *обозначение* $N \equiv_s N'$, *если* $StepTraces(N) = StepTraces(N')$.

Определение 3.3 ЧУММ-след *сети* N *— ЧУММ* ρ, *класс изоморфизма ПЧУМ* ρ_C *для* $\pi = (C, \varphi) \in \Pi(N)$. *Пишем* $\rho \sqsubseteq \rho'$, *если* $\rho_C \sqsubseteq \rho_{C'}$, *где* $\rho_C \in \rho$ *и* $\rho_{C'} \in \rho'$. *В таком случае ЧУММ* ρ более параллельное, *чем* ρ'. $Pomsets(N)$ *обозначает* множество всех ЧУММ-следов *сети* N. *Сети* N *и* N' ЧС следово эквивалентны, *обозначение* $N \equiv_{pw} N'$, *если* $Pomsets(N) \sqsubseteq Pomsets(N')$ *и* $Pomsets(N') \sqsubseteq Pomsets(N)$, *то есть для любого* $\rho' \in Pomsets(N')$ *существует* $\rho \in Pomsets(N)$ *такое, что* $\rho \sqsubseteq \rho'$, *и наоборот.*

Определение 3.4 *Сети* N *и* N' ЧУММ-следово эквивалентны, *обозначение* $N \equiv_{pom} N'$, *если* $Pomsets(N) = Pomsets(N')$.

Определение 3.5 Процессный след *сети* N *— класс изоморфизма С-сети* C *для* $\pi = (C, \varphi) \in \Pi(N)$. $ProcessNets(N)$ *обозначает* множество всех процессных следов N. *Сети* N *и* N' процессно следово эквивалентны, *обозначение* $N \equiv_{pr} N'$, *если* $ProcessNets(N) = ProcessNets(N')$.

3.2 Обычные бисимуляционные эквивалентности

Бисимуляционные эквивалентности учитывают момент недетерминированного выбора между несколькими расширениями процесса ("ветвления"). Поэтому их называют эквивалентностями *ветвистого времени.*

Определение 3.6 *Отношение* $\mathcal{R} \subseteq \Pi(N) \times \Pi(N')$ *—* $\star$-бисимуляция *между* N *и* N', $\star \in$ $\{$интерливингивая, шаговая, ЧС, ЧУММ, процессная$\}$, *запись* $\mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_\star N'$, $\star \in \{i, s, pw, pom, pr\}$, *если:*

1. $(\pi_N, \pi_{N'}) \in \mathcal{R}$.
2. $(\pi, \pi') \in \mathcal{R},\ \pi \stackrel{\hat{\pi}}{\rightarrow} \tilde{\pi}$,

   (а) $|T_{\widehat{C}}| = 1$, *если* $\star = i$;
   (б) $\prec_{\widehat{C}} = \emptyset$, *если* $\star = s$;

   $\Rightarrow \exists \tilde{\pi}' :\ \pi' \stackrel{\hat{\pi}'}{\rightarrow} \tilde{\pi}',\ (\tilde{\pi}, \tilde{\pi}') \in \mathcal{R}$ *и*

   (а) $\rho_{\widehat{C}'} \sqsubseteq \rho_{\widehat{C}}$, *если* $\star = pw$;
   (б) $\rho_{\widehat{C}} \simeq \rho_{\widehat{C}'}$, *если* $\star \in \{i, s, pom\}$;
   (в) $\widehat{C} \simeq \widehat{C}'$, *если* $\star = pr$.

3. *Как пункт 2, но роли* N *и* N' *меняются.*

Сети N *и* N' $\star$-бисимуляционно эквивалентны, $\star \in \{$интерливингивая, шаговая, ЧС, ЧУММ, процессная$\}$, *запись* $N \underline{\leftrightarrow}_\star N'$, *если* $\exists \mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_\star N'$, $\star \in \{i, s, pw, pom, pr\}$.

3.3 ST-бисимуляционные эквивалентности

Для определения ST-бисимуляционных эквивалентностей введем понятие ST-процесса, которых представляет состояния сети с временной протяженностью срабатывания переходов.

Определение 3.7 ST-процесс *сети* N *— пара* (π_E, π_P) *такая, что* $\pi_E, \pi_P \in \Pi(N)$, $\pi_P \stackrel{\pi_W}{\rightarrow} \pi_E$ *и* $\forall v, w \in T_{C_E}\ v \prec_{C_E} w \ \Rightarrow\ v \in T_{C_P}$

В таком случае π_E — процесс, который начал работать, то есть все действия π_E начали выполняться. Процесс π_P соответствует закончившей работу части π_E, а π_W — еще работающей части. $ST-\Pi(N)$ обозначает множество всех *ST-процессов* сети N. (π_N, π_N) — *начальный ST-процесс* сети N. Пусть $(\pi_E, \pi_P),\ (\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P) \in ST-\Pi(N)$. Пишем $(\pi_E, \pi_P) \rightarrow (\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P)$, если $\pi_E \rightarrow \tilde{\pi}_E$ и $\pi_P \rightarrow \tilde{\pi}_P$.

ST-бисимуляционные эквивалентности учитывают длительность срабатывания переходов при функционировании сетей, в предположении, что работающие в данный момент переходы забирают фишки из своих входных мест, но еще не выдают их в выходные места [6].

Определение 3.8 *Отношение* $\mathcal{R} \subseteq ST-\Pi(N) \times ST-\Pi(N') \times \mathcal{B}$, *где* $\mathcal{B} = \{\beta \mid \beta : T_C \rightarrow T_{C'},\ \pi = (C, \varphi) \in \Pi(N),\ \pi' = (C', \varphi') \in \Pi(N')\}$ *—* $\star$-ST-бисимуляция *между* N *и* N', $\star \in \{$интерливинговая, ЧС, ЧУММ, процессная$\}$, *запись* $\mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_{\star ST} N'$, $\star \in \{i, pw, pom, pr\}$, *если:*

1. $((\pi_N, \pi_N), (\pi_{N'}, \pi_{N'}), \emptyset) \in \mathcal{R}$.
2. $((\pi_E, \pi_P), (\pi'_E, \pi'_P), \beta) \in \mathcal{R} \ \Rightarrow\ \beta : \rho_{C_E} \approx \rho_{C'_E}$ *и* $\beta(T_{C_P}) = T_{C'_P}$.
3. $((\pi_E, \pi_P), (\pi'_E, \pi'_P), \beta) \in \mathcal{R},\ (\pi_E, \pi_P) \rightarrow (\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P) \ \Rightarrow\ \exists \tilde{\beta},\ (\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P) :\ (\pi'_E, \pi'_P) \rightarrow (\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P),\ \tilde{\beta}|_{T_{C_E}} = \beta,\ ((\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P), (\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P), \tilde{\beta}) \in \mathcal{R}$, *и если* $\pi_P \stackrel{\pi}{\rightarrow} \tilde{\pi}_E,\ \pi'_P \stackrel{\pi'}{\rightarrow} \tilde{\pi}'_E,\ \gamma = \tilde{\beta}|_{T_C}$, *то:*

   (а) $\gamma^{-1} : \rho_{C'} \sqsubseteq \rho_C$, *если* $\star = pw$;
   (б) $\gamma : \rho_C \simeq \rho_{C'}$, *если* $\star \in \{pom, pr\}$;
   (в) $C \simeq C'$, *если* $\star = pr$.

4. *Как пункт 3, но роли* N *и* N' *меняются.*

Сети N *и* N' $\star$-ST-бисимуляционно эквивалентны, $\star \in \{$интерливингивая, ЧС, ЧУММ, процессная$\}$, *запись* $N \underline{\leftrightarrow}_{\star ST} N'$, *если* $\exists \mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_{\star ST} N'$, $\star \in \{i, pw, pom, pr\}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \simeq \arrow[d] \\
 & & & \equiv_{mes} \arrow[d] & \equiv_{occ} \arrow[l] \arrow[d] \\
 & & & \underline{\leftrightarrow}_{pomh} \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_{prh} \arrow[l] \arrow[d] \\
 & \underline{\leftrightarrow}_{iST} \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_{pwST} \arrow[l] \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_{pomST} \arrow[l] \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_{prST} \arrow[l] \arrow[d] \\
\underline{\leftrightarrow}_{i} \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_{s} \arrow[l] \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_{pw} \arrow[l] \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_{pom} \arrow[l] \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_{pr} \arrow[l] \arrow[d] \\
\equiv_{i} & \equiv_{s} \arrow[l] & \equiv_{pw} \arrow[l] & \equiv_{pom} \arrow[l] & \equiv_{pr} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Рис. 1: Взаимосвязи эквивалентностей

3.4 Сохраняющие историю бисимуляционные эквивалентности

Сохраняющие историю бисимуляционные эквивалентности учитывают “прошлое” (историю) функционирования сетей, то есть при моделировании учитывается та часть процесса, выполнение которой приводит в текущее состояние.

Определение 3.9 *Отношение* $\mathcal{R} \subseteq \Pi(N) \times \Pi(N') \times \mathcal{B}$, *где* $\mathcal{B} = \{\beta \mid \beta : T_C \to T_{C'},\ \pi = (C, \varphi) \in \Pi(N),\ \pi' = (C', \varphi') \in \Pi(N')\}$ — $\star$-сохраняющая историю бисимуляция *между* N *и* N', $\star \in${ЧУММ, процессная}, *запись* $N \underline{\leftrightarrow}_{\star h} N'$, $\star \in \{pom, pr\}$, *если:*

1. $(\pi_N, \pi_{N'}, \emptyset) \in \mathcal{R}$.
2. $(\pi, \pi', \beta) \in \mathcal{R} \ \Rightarrow$
   (a) $\beta : \rho_C \simeq \rho_{C'}$, *если* $\star \in \{pom, pr\}$;
   (б) $C \simeq C'$, *если* $\star = pr$.
3. $(\pi, \pi', \beta) \in \mathcal{R},\ \pi \to \tilde{\pi} \ \Rightarrow\ \exists \tilde{\beta},\ \tilde{\pi}' : \pi' \to \tilde{\pi}',\ \tilde{\beta}|_{T_C} = \beta,\ (\tilde{\pi}, \tilde{\pi}', \tilde{\beta}) \in \mathcal{R}$.
4. *Как пункт 3, но роли* N *и* N' *меняются.*

Сети N *и* N' $\star$-сохраняюще историю бисимуляционно эквивалентны, $\star \in${ЧУММ, процессная}, *запись* $N \underline{\leftrightarrow}_{\star h} N'$, *если* $\exists \mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_{\star h} N'$, $\star \in \{pom, pr\}$.

3.4.1 Сохраняющие конфликт эквивалентности

Сохраняющие конфликт эквивалентности полностью учитывают конфликты в сетях.

Определение 3.10 *Сети* N *и* N' МСС сохраняюще конфликт эквивалентны, *обозначение* $N \equiv_{mes} N'$, *если* $\mathcal{E}(N) = \mathcal{E}(N')$.

Определение 3.11 *Сети* N *и* N' О-процессно сохраняюще конфликт эквивалентны, *обозначение* $N \equiv_{occ} N'$, *если* $\mathcal{U}(N) = \mathcal{U}(N')$.

4 Сравнение эквивалентностей

В данном разделе исследуются взаимосвязи между введенными эквивалентностями на всем классе сетей Петри.

В следующей теореме и далее символом ‘_ ’ будем обозначать пустую альтернативу. То есть знак, подписанный или надписанный этим символом, будем считать знаком без подписей и надписей.

Теорема 4.1 *Пусть* $\leftrightarrow, \twoheadleftrightarrow \in \{\equiv, \underline{\leftrightarrow}, \simeq\}$ *и* $\star, \star\star \in \{\_, i, s, pw, pom, pr, iST, pwST, pomST, prST, pomh, prh, mes, occ\}$. *Для сетей* N *и* N' *справедливо:* $N \leftrightarrow_\star N' \ \Rightarrow\ N \twoheadleftrightarrow_{\star\star} N'$ *тогда и только тогда, когда существует направленный путь от* $\leftrightarrow_\star$ *к* $\twoheadleftrightarrow_{\star\star}$ *в графе на рисунке 1.*

Доказательство. $\Leftarrow$ Проверим, что все импликации на рисунке 1 действительны.

- Связи между следовыми и интерливинговыми эквивалентностями — следствия того, что изоморфизм ПЧУМ с пустым отношением предшествования является изоморфизмом одноэлементных ПЧУМ.
- Связи между эквивалентностями частичных слов и шаговыми — следствия того, что гомоморфизм ПЧУМ является изоморфизмом ПЧУМ с пустым отношением предшествования.
- Связь $\underline{\leftrightarrow}_{pwST} \to \underline{\leftrightarrow}_{iST}$ — следствие того, что гомоморфизм ПЧУМ является сохраняющей пометку биекцией.
- Связи между эквивалентностями ЧУММ и ЧС — следствия того, что изоморфизм ПЧУМ является гомоморфизмом.
- Связи между процессными эквивалентностями и эквивалентностями ЧУММ — следствия того, что ПЧУМ на основе изоморфных С-сетей также изоморфны.
- Связь $\equiv_{occ}\to\equiv_{mes}$ имеет место, так как МСС изоморфных О-сетей совпадают.
- Связь $\underline{\leftrightarrow}_i \to\equiv_i$ устанавливается следующим образом. Пусть $\mathcal{R} : N\underline{\leftrightarrow}_i N'$. Если $\pi_N \xrightarrow{a_1} \pi_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} \pi_n$, то существует последовательность $(\pi_N, \pi_{N'}), (\pi_1, \pi'_1), \dots, (\pi_n, \pi'_n) \in \mathcal{R}$ такая, что $\pi_{N'} \xrightarrow{a_1} \pi'_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} \pi'_n$, и наоборот, в силу симметричности бисимуляции.
- Связь $\underline{\leftrightarrow}_s \to\equiv_s$ доказывается аналогично предыдущему пункту, но только вместо $a_1, \dots, a_n \in Act$ используем $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}(Act)$.
- Связь $\underline{\leftrightarrow}_{pw} \to\equiv_{pw}$ доказывается так. Пусть $\mathcal{R} : N\underline{\leftrightarrow}_{pw}N'$ и ρ — класс изоморфизма ρ_C для $\pi = (C, \varphi) \in \Pi(N)$. Так как $\pi_N \xrightarrow{\pi} \pi$, существует пара $(\pi, \pi') \in \mathcal{R}$ такая, что $\pi' = (C', \varphi')$ и $\rho_{C'} \sqsubseteq \rho_C$. Если ρ' — класс изоморфизма $\rho_{C'}$, то $\rho' \sqsubseteq \rho$. Значит, $Pomsets(N') \sqsubseteq Pomsets(N)$. Включение $Pomsets(N) \sqsubseteq Pomsets(N')$, доказывается аналогично с использованием симметричности бисимуляции.
- Связь $\underline{\leftrightarrow}_{pom} \to\equiv_{pom}$ доказывается так же, как в предыдущем пункте, только с использованием изоморфизма вместо гомоморфизма ПЧУМ.
- Связь $\underline{\leftrightarrow}_{pr} \to\equiv_{pr}$ устанавливается аналогично предыдущему пункту с использованием процессных следов вместо ЧУММ-следов и изоморфизма С-сетей процессов вместо изоморфизма их ПЧУМ.
- Связи $\underline{\leftrightarrow}_{\star ST} \to \underline{\leftrightarrow}_{\star}$, $\star \in \{pw, pom, pr\}$, доказываются с помощью построения на основе отношения $\mathcal{R} : N\underline{\leftrightarrow}_{\star ST}N'$ отношения $\mathcal{S} : N\underline{\leftrightarrow}_{\star}N'$, которое определяется так: $\mathcal{S} = \{(\pi, \pi') \mid \exists\beta\ ((\pi, \pi), (\pi', \pi'), \beta) \in \mathcal{R}\}$.
- Связь $\underline{\leftrightarrow}_{iST} \to \underline{\leftrightarrow}_s$ проверяется так же, как в предыдущем пункте, с учетом того, что шагу $\pi \xrightarrow{A} \tilde{\pi}$, где $A = \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{M}(Act)$, соответствует последовательность ST-процессов $(\pi_0, \pi_0), \dots,$ $(\pi_n, \pi_0), \dots, (\pi_n, \pi_n)$ такая, что $\pi = \pi_0 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_n} \pi_n = \tilde{\pi}$.
- Связи $\underline{\leftrightarrow}_{\star h} \to \underline{\leftrightarrow}_{\star ST}$, $\star \in \{pom, pr\}$, доказываются построением на основе $\mathcal{R} : N\underline{\leftrightarrow}_{\star h}N'$ отношения $\mathcal{S} : N\underline{\leftrightarrow}_{\star ST}N'$ следующим образом: $\mathcal{S} = \{((\pi_E, \pi_P), (\pi'_E, \pi'_P), \beta) \mid (\pi_E, \pi'_E, \beta) \in \mathcal{R},\ (\pi_E, \pi_P) \in ST-\Pi(N),\ (\pi'_E, \pi'_P) \in ST-\Pi(N'),\ \beta(T_{C_P}) = T_{C'_P}\}$.
- Связь $\equiv_{mes}\to \underline{\leftrightarrow}_{pomh}$ доказывается следующим образом. Пусть $\varpi = (O, \psi) \in \wp_{max}(N)$, $\varpi' = (O', \psi') \in \wp_{max}(N')$, $\gamma : \xi_O \simeq \xi_{O'}$. Тогда $\mathcal{R} : N\underline{\leftrightarrow}_{pomh}N'$, где отношение $\mathcal{R}$ определяется следующим образом: $\mathcal{R} = \{(\pi, \pi', \beta) \mid \pi$ — вычисление ϖ, π' — вычисление ϖ', такие, что $\gamma|_{T_C} : \rho_C \simeq \rho_{C'},\ \beta = \gamma|_{T_C}\}$.
- Связь $\equiv_{occ}\to \underline{\leftrightarrow}_{prh}$ доказывается следующим образом. Пусть $\varpi = (O, \psi) \in \wp_{max}(N)$, $\varpi' = (O', \psi') \in \wp_{max}(N')$, $\gamma : O \simeq O'$. Тогда $\mathcal{R} : N\underline{\leftrightarrow}_{prh}N'$, где отношение $\mathcal{R}$ определяется следующим образом: $\mathcal{R} = \{(\pi, \pi', \beta) \mid \pi$ — вычисление ϖ, π' — вычисление ϖ', такие, что $\gamma|_{(P_C \cup T_C)} : C \simeq C',\ \beta = \gamma|_{T_C}\}$.
- Связь $\simeq\to\equiv_{occ}$ следует из того факта, что изоморфные сети имеют одинаковые развертки.

$\Rightarrow$ Отсутствие дополнительных нетривиальных связей на рисунке 1 доказывается следующими примерами.

- На рисунке 2(а) $N \underline{\leftrightarrow}_i N'$, но $N \not\equiv_s N'$, так как только в сети N' действия a и b не могут сработать параллельно.
- На рисунке 2(в) $N \underline{\leftrightarrow}_{iST} N'$, но $N \not\equiv_{pw} N'$, так как сети N соответствует ЧУММ такое, что даже более параллельное ЧУММ не может быть выполнено в N'.
- На рисунке 2(б) $N \underline{\leftrightarrow}_{pwST} N'$, но $N \not\equiv_{pom} N'$, так как в N' действие b может зависеть от a.
- На рисунке 2(г) $N \equiv_{mes} N'$, но $N \not\equiv_{pr} N'$, так как N' — С-сеть, не изоморфная С-сети N (из-за дополнительного выходного места).
- На рисунке 2(д) $N \equiv_{pr} N'$, но $N \underline{\not\leftrightarrow}_i N'$, так как только в сети N' можно выполнить действие a так, что после него нельзя выполнить b.
- На рисунке 3(а) $N \underline{\leftrightarrow}_{pr} N'$, но $N \underline{\not\leftrightarrow}_{iST} N'$, так как в сети N' действие a может так начать работать, что никакое b уже не может стартовать, пока a не окончит работу.
- На рисунке 3(б) $N \underline{\leftrightarrow}_{prST} N'$, но $N \underline{\not\leftrightarrow}_{pomh} N'$, так как только в сети N' можно выполнить a и b так, чтобы следующее действие, c, обязательно зависело от a.
- На рисунке 3(в) $N \underline{\leftrightarrow}_{prh} N'$, но $N \not\equiv_{mes} N'$, так как сети N' соответствует МСС с двумя конфликтными между собой действиями a.
- На рисунке 3(г) $N \equiv_{occ} N'$, но $N \not\simeq N'$, так как никогда не срабатывающие переходы сетей N и N' помечены разными действиями (a и b). □

5 Сравнение эквивалентностей на последовательных сетях

В данном разделе исследуется взаимосвязи между введенными эквивалентностями на последовательных сетях, в которых невозможно параллельное выполнение переходов.

Определение 5.1 Последовательная сеть — *сеть* $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N, M_N \rangle$ *такая, что* $\forall M \in Mark(N)$ $\neg\exists t, u \in T_N :\ {}^\bullet t + {}^\bullet u \subseteq M$, *то есть никакие два перехода не допустимы вместе ни в одной из достижимых маркировок.*

Предложение 5.1 *Для последовательных сетей N и N' справедливо:*

1. $N \equiv_i N' \ \Leftrightarrow\ N \equiv_{pom} N'$;
2. $N \underline{\leftrightarrow}_i N' \ \Leftrightarrow\ N \underline{\leftrightarrow}_{pomh} N'$.

Доказательство.

1. $\Leftarrow$ По теореме 4.1.

   $\Rightarrow$ Пусть $N \equiv_i N'$, тогда $IntTraces(N) = IntTraces(N')$. Чтобы доказать $N \equiv_{pom} N'$, достаточно установить равенство $Pomsets(N) = Pomsets(N')$. Оно очевидно, так как $Pomsets(N)$ и $Pomsets(N')$ — линейно упорядоченные мультимножества (цепочки), и существует взаимно однозначное отображение между $IntTraces(N)$ и $Pomsets(N)$ ($IntTraces(N')$ и $Pomsets(N')$ соответственно).

2. Используя предложение 5.4 из [3]. □

Теорема 5.1 *Пусть* $\leftrightarrow, \leftrightarrow\!\!\!\!\leftrightarrow \in \{\equiv, \underline{\leftrightarrow}, \simeq\}$ *и* $\star, \star\star \in \{\_, i, pr, prST, prh, mes, occ\}$. *Для последовательных сетей N и N' справедливо:* $N \leftrightarrow_\star N' \ \Rightarrow\ N \leftrightarrow\!\!\!\!\leftrightarrow_{\star\star} N'$ *тогда и только тогда, когда существует направленный путь от* $\leftrightarrow_\star$ *к* $\leftrightarrow\!\!\!\!\leftrightarrow_{\star\star}$ *в графе на рисунке 4.*

Доказательство. $\Leftarrow$ По теореме 4.1.

$\Rightarrow$ Отсутствие дополнительных нетривиальных связей на рисунке 4 доказывается следующими примерами на последовательных сетях.

- На рисунке 2(г) $N \equiv_{mes} N'$, но $N \not\equiv_{pr} N'$.
- На рисунке 2(д) $N \equiv_{pr} N'$, но $N \underline{\not\leftrightarrow}_i N'$.

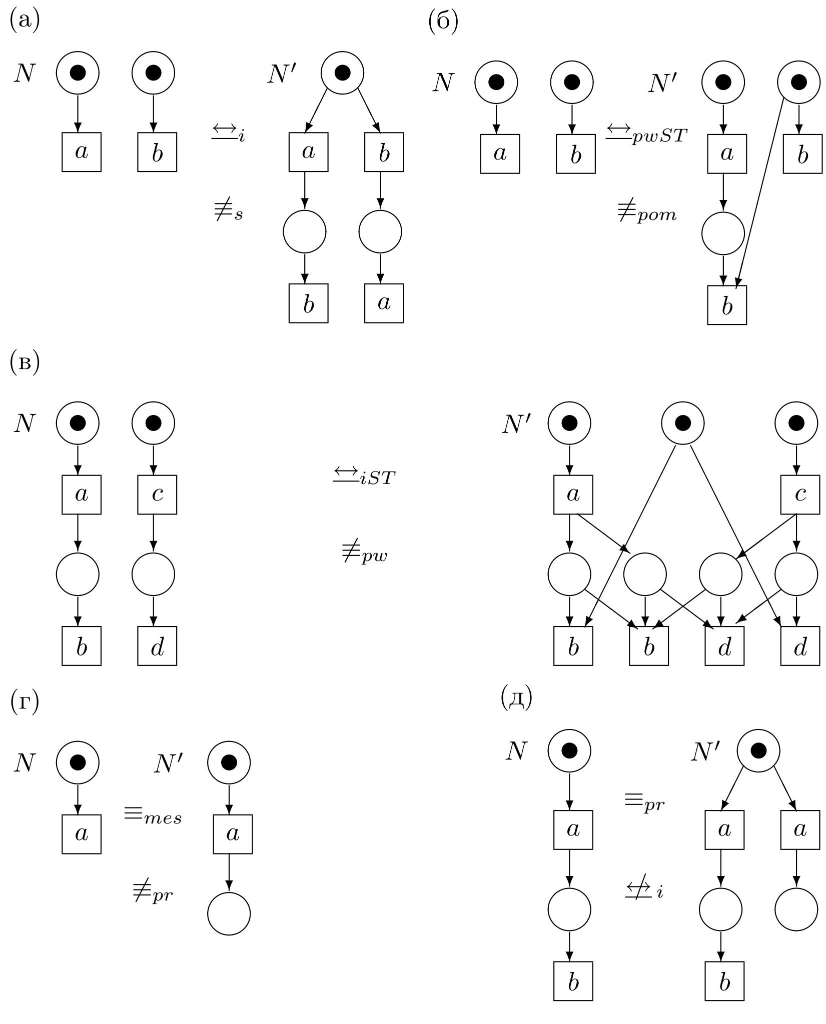

Рис. 2: Примеры эквивалентностей

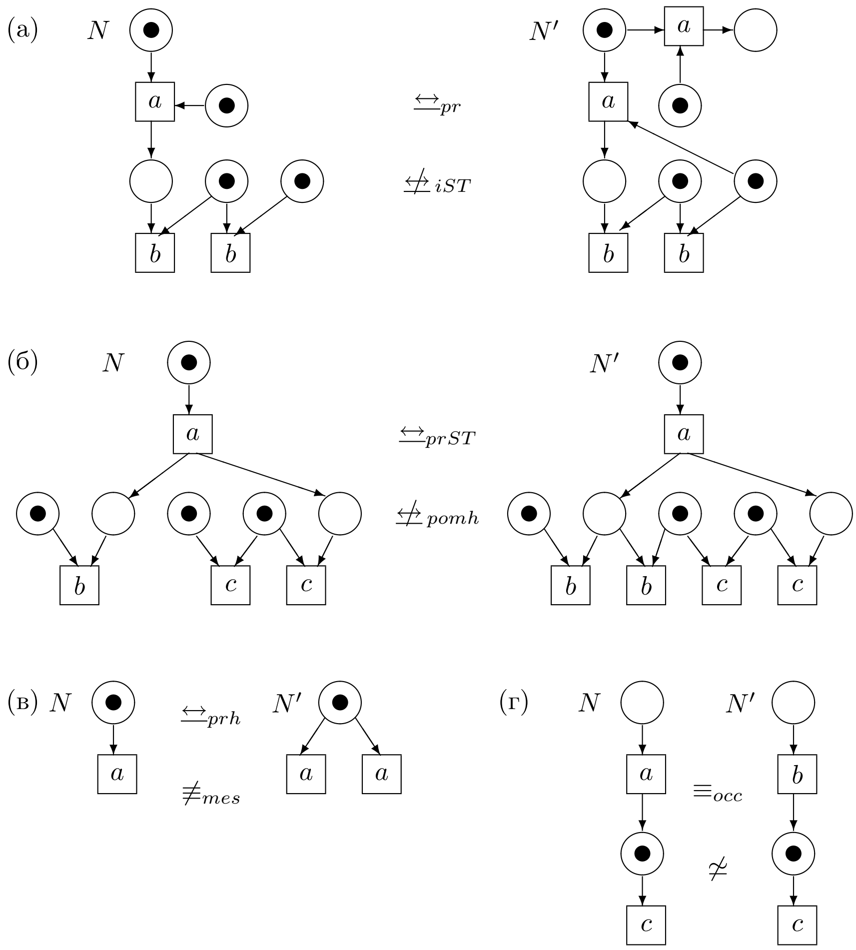

Рис. 3: Примеры эквивалентностей (продолжение)

$$\begin{tikzcd}
 & \simeq \arrow[d] \\
\equiv_{mes} \arrow[ddd] & \equiv_{occ} \arrow[l] \arrow[d] \\
 & \underline{\leftrightarrow}_{prh} \arrow[d] \\
 & \underline{\leftrightarrow}_{prST} \arrow[d] \\
\underline{\leftrightarrow}_{i} \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_{pr} \arrow[l] \arrow[d] \\
\equiv_{i} & \equiv_{pr} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Рис. 4: Взаимосвязь эквивалентностей на последовательных сетях

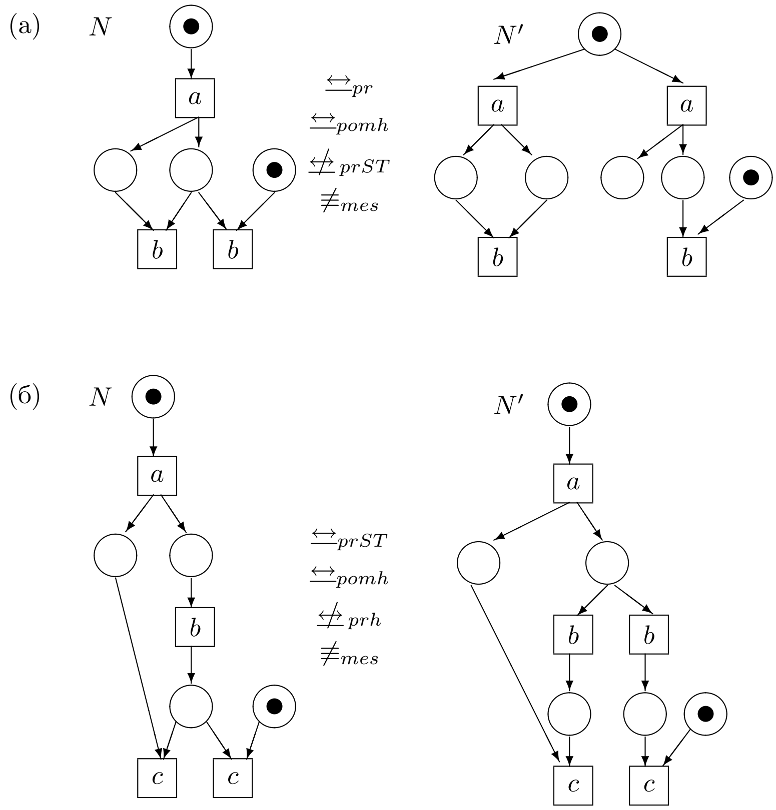

Рис. 5: Примеры эквивалентностей на последовательных сетях

- На рисунке 5(а) $N \underline{\leftrightarrow}_{pr} N'$, но $N \not\underline{\leftrightarrow}_{prST} N'$, так как только в сети N' процесс с действием a может начать работать так, что его можно расширить на процесс с действием b только одним способом (то есть так, что раширенный процесс — только один).
- На рисунке 5(б) $N \underline{\leftrightarrow}_{prST} N'$, но $N \not\underline{\leftrightarrow}_{prh} N'$, так как только в сети N' существует процесс с действиями a и b такой, что его можно расширить на процесс с действием c только только одним способом (то есть так, что связь С-сети с действием c и содержащей действие a подсети С-сети с действиями a и b — только одного вида).
- На рисунке 3(в) $N \underline{\leftrightarrow}_{prh} N'$, но $N \not\equiv_{mes} N'$.
- На рисунке 3(г) $N \equiv_{occ} N'$, но $N \not\simeq N'$. $\square$

6 Сохранение эквивалентностей при детализациях

В данном разделе эквивалентностные понятия проверяются на сохранение при применении операции детализации, то есть при переходе на более низкий уровень абстракции.

Определение 6.1 SM-сеть *— сеть $D = \langle P_D, T_D, F_D, l_D, M_D \rangle$ такая, что:*

1. *$\forall t \in T_D \ |{}^\bullet t| = |t^\bullet| = 1$, то есть каждый имеет ровно одно входное и ровно одно выходное места;*
2. *$\exists p_{in},\ p_{out} \in P_D$ такие, что $p_{in} \neq p_{out}$ и ${}^\circ D = \{p_{in}\},\ D^\circ = \{p_{out}\}$, то есть сеть D имеет единственное входное и единственное выходное места.*
3. *$M_D = \{p_{in}\}$, то есть сначала имеется единственная фишка в p_{in}.*

Определение 6.2 *Пусть $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N, M_N \rangle$ — некоторая сеть, $a \in l_N(T_N)$ и $D = \langle P_D, T_D, F_D, l_D, M_D \rangle$ — SM-сеть.* SM-детализация*, обозначение $ref(N, a, D)$, — это (с точностью до изоморфизма) сеть $\overline{N} = \langle P_{\overline{N}}, T_{\overline{N}}, F_{\overline{N}}, l_{\overline{N}}, M_{\overline{N}} \rangle$, такая, что:*

1. $P_{\overline{N}} = P_N \cup \{\langle p, u\rangle \mid p \in P_D \setminus \{p_{in}, p_{out}\},\ u \in l_N^{-1}(a)\}$;

2. $T_{\overline{N}} = (T_N \setminus l_N^{-1}(a)) \cup \{\langle t, u\rangle \mid t \in T_D,\ u \in l_N^{-1}(a)\}$;

3. $F_{\overline{N}}(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} F_N(\bar{x}, \bar{y}), & \bar{x}, \bar{y} \in P_N \cup (T_N \setminus l_N^{-1}(a)); \\ F_D(x, y), & \bar{x} = \langle x, u\rangle,\ \bar{y} = \langle y, u\rangle,\ u \in l_N^{-1}(a); \\ F_N(\bar{x}, u), & \bar{y} = \langle y, u\rangle,\ \bar{x} \in {}^\bullet u,\ u \in l_N^{-1}(a),\ y \in p_{in}^\bullet; \\ F_N(u, \bar{y}), & \bar{x} = \langle x, u\rangle,\ \bar{y} \in {}^\bullet u,\ u \in l_N^{-1}(a),\ x \in {}^\bullet p_{out}; \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases}$

4. $l_{\overline{N}}(\bar{u}) = \begin{cases} l_N(\bar{u}), & \bar{u} \in T_N \setminus l_N^{-1}(a); \\ l_D(t), & \bar{u} = \langle t, u\rangle,\ t \in T_D,\ u \in l_N^{-1}(a); \end{cases}$

5. $M_{\overline{N}}(p) = \begin{cases} M_N(p), & p \in P_N; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Некоторая сетевая эквивалентность *сохраняется при детализациях*, если эквивалентные сети остаются таковыми после одновременного применения к ним любого оператора детализации.

Предложение 6.1 *Эквивалентности* $\equiv_\star$, $\star \in \{i, s\}$ *и* $\underline{\leftrightarrow}_{\star\star}$, $\star\star \in \{i, s, pw, pom, pr\}$ *не сохраняются при SM-детализациях.*

Доказательство.

- На рисунке 6 $N \underline{\leftrightarrow}_s N'$, но $ref(N, c, D) \not\equiv_i ref(N', c, D)$, так как только в $ref(N', c, D)$ может выполниться последовательность действий $c_1 abc_2$. Следовательно, никакие эквивалентности между $\equiv_i$ и $\underline{\leftrightarrow}_s$ не сохраняются при SM-детализациях.
- На рисунке 7 $N \underline{\leftrightarrow}_{pr} N'$, но $ref(N, a, D) \not\underline{\leftrightarrow}_i ref(N', a, D)$, так как только в $ref(N', a, D)$ после выполнения действия a_1 действие b не может выполниться. Следовательно, никакие эквивалентности между $\underline{\leftrightarrow}_i$ и $\underline{\leftrightarrow}_{pr}$ не сохраняются при SM-детализациях. □

Рассмотрим, какие из сетевых эквивалентностей сохраняются при SM-детализациях.

Предложение 6.2 *Пусть* $\star \in \{pw, pom, pr\}$. *Для сетей* N *и* N' *таких, что* $a \in l_N(T_N) \cap l_{N'}(T_{N'})$ *и SM-сети* D *справедливо:* $N \equiv_\star N' \ \Rightarrow\ ref(N, a, D) \equiv_\star ref(N', a, D)$.

Доказательство. Пусть $\overline{N} = ref(N, a, D)$, $\overline{N}' = ref(N', a, D)$. Заметим, что C-сети процессов SM-сетей — простые цепочки, то есть сети, каждая вершина которых имеет ровно одного предшественника (за исключением единственного входного места) и ровно одного последователя (за исключением единственного выходного места).

Конструкция (*)

1. Пусть $\bar{\pi} = (\overline{C}, \bar{\varphi}) \in \Pi(\overline{N})$. Тогда каждая вершина $\overline{C}$, которая не отображается функцией встраивания в множество $P_N \cup T_N$, обладает следующими свойствами:
   - имеет вид $\langle e, f\rangle$, $(e \in P_{C_D} \cup T_{C_D},\ \pi_D = (C_D, \varphi_D) \in \Pi(D)$ и $f \in T_C,\ \pi = (C, \varphi) \in \Pi(N))$ и отображается функцией встраивания в элемент вида $\langle x, u\rangle$, $x \in T_D \cup (P_D \setminus \{p_{in}, p_{out}\})$, $u \in l_N^{-1}(a)$;
   - имеет единственного предшественника $\langle e_{min}, f\rangle$, отображаемого функцией встраивания в $\langle t_{min}, u\rangle$, $t_{min} \in p_{in}^\bullet$;
   - принадлежит единственной максимальной цепочке ϑ (соответствующей сети C_D), начинающейся в $\langle e_{min}, f\rangle$, все вершины которой отображаются функцией встраивания в элементы вида $\langle y, u\rangle$, $y \in T_D \cup (P_D \setminus \{p_{in}, p_{out}\})$ и единственные связи которой с окружением процесса следующие:
     - через входные места $\langle e_{min}, f\rangle$ (всегда);
     - (а) через выходные места максимальной вершины цепочки $\langle e_{max}, f\rangle$, которая является переходом, отображаемым функцией встраивания в $\langle t_{max}, u\rangle$, $t_{max} \in {}^\bullet p_{out}$;
       (б) или цепочка обрывается на максимальном месте раньше.

   Следовательно, каждую такую цепочку ϑ, входящую в сеть $\overline{C}$, можно заменить:

   (а) на переход f, отображаемый функцией встраивания в u, так как они имеют одинаковые входы и выходы;

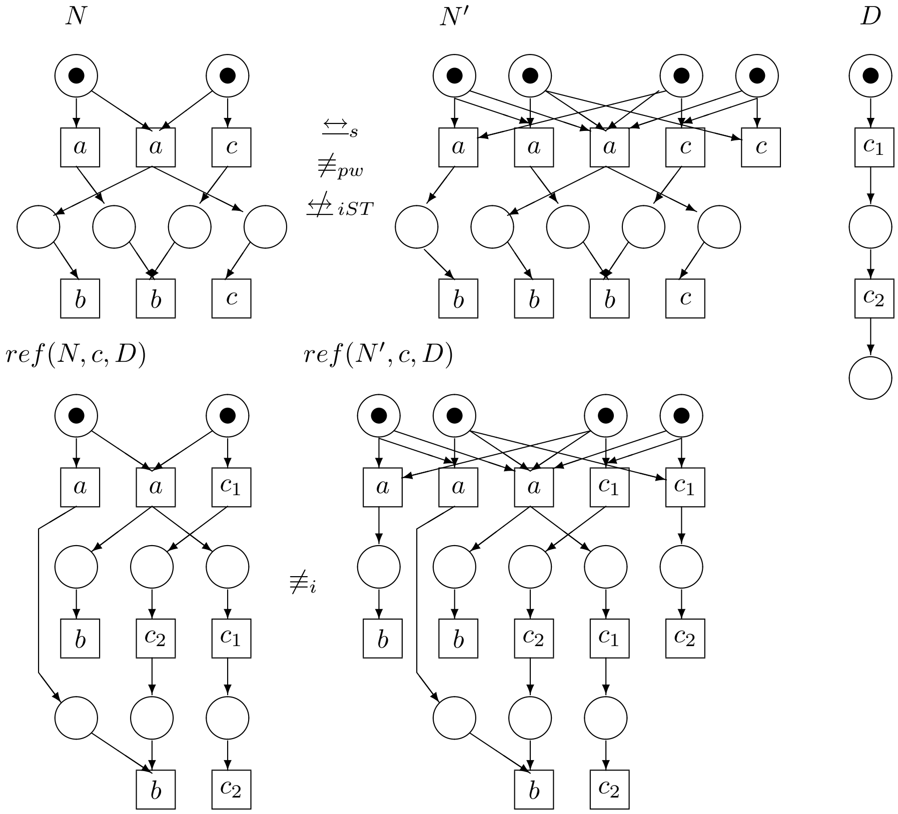

Рис. 6: Эквивалентности между $\equiv_i$ и $\underline{\leftrightarrow}_s$ не сохраняются при SM-детализациях

(б) на переход f, отображаемый функцией встраивания в u, с новыми выходными местами, соответствующими u, так как они имеют одинаковые входы, и после f ничего нет (в этом случае f — максимальный переход).

В результате получим процесс $\pi = (C, \varphi) \in \Pi(N)$.

2. Так как $N \equiv_\star N'$, $\star \in \{pw, pom, pr\}$, всегда можно выбрать $\pi' = (C', \varphi') \in \Pi(N')$ и β такие, что:

   - $\beta^{-1} : \rho_{C'} \sqsubseteq \rho_C$, если $\star = pw$;
   - $\beta : \rho_C \simeq \rho_{C'}$, если $\star = pom$;
   - $\beta : C \simeq C'$, если $\star = pr$.

3. Для любой цепочки ϑ, сконструированной таким образом, заменим в C' переход $\beta(f)$, встраивающийся в u', на копию ϑ' цепочки ϑ, где все вершины вида $\langle e, f\rangle$ заменяются на $\langle e, \beta(f)\rangle$. Возможны два случая:

   (а) если цепочка полная, то $\beta(f)$ и ϑ' имеют одинаковые выходы (из u');

   (б) если цепочка неполная (заканчивается на месте), то отбрасываем все выходные места $\beta(f)$.

   В обоих случаях $\beta(f)$ и ϑ' имеют одинаковые входы (в u').

   Ясно, что сконструированный таким образом объект — процесс $\bar{\pi}' = (\overline{C}', \bar{\varphi}') \in \Pi(\overline{N}')$.

4. Пусть $g \in T_{\overline{C}}$. Определим отображение $\bar{\beta}$ следующим образом:

$$\bar{\beta}(g) = \begin{cases} \beta(g), & g \text{ не входит ни в какую цепочку;} \\ \langle e, \beta(f)\rangle, & g = \langle e, f\rangle \text{ входит в некоторую цепочку } \vartheta. \end{cases}$$

□ (Конструкция (*))

Осталось доказать следующие утверждения.

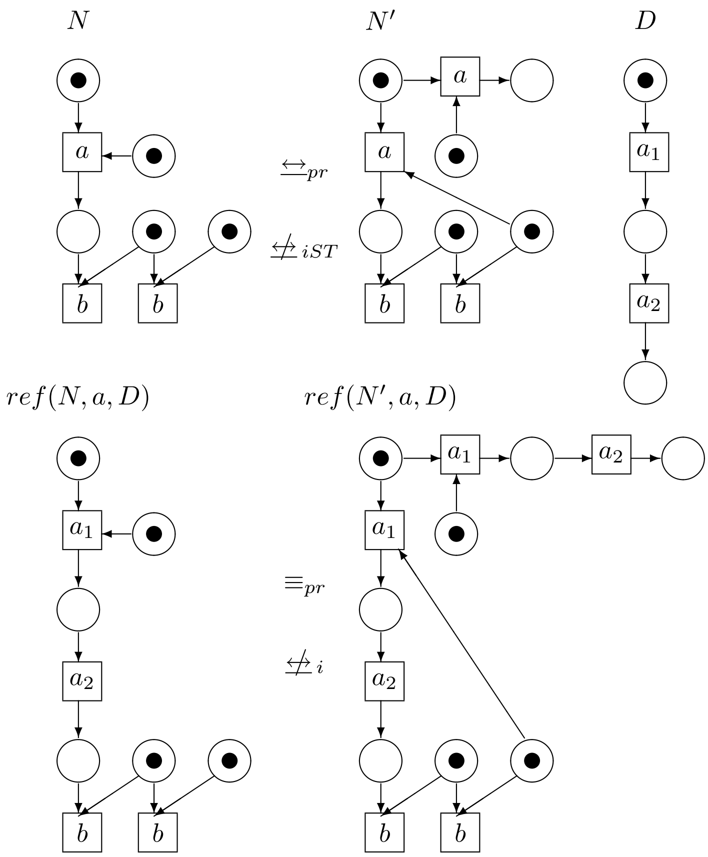

Рис. 7: Эквивалентности между $\underline{\leftrightarrow}_i$ и $\underline{\leftrightarrow}_{pr}$ не сохраняются при SM-детализациях

- $\bar{\beta}^{-1} : \rho_{\overline{C}'} \sqsubseteq \rho_{\overline{C}}$, если $\star = pw$;

- $\bar{\beta} : \rho_{\overline{C}} \simeq \rho_{\overline{C}'}$, если $\star = pom$;

- $\bar{\beta} : \overline{C} \simeq \overline{C}'$, если $\star = pr$.

Рассмотрим случай $\star = pw$, так как случаи $\star = pom$ и $\star = pr$ — более простые. Пусть $g, h \in T_{\overline{C}}$. Возможны пять случаев:

1. g и h не входят ни в какую цепочку;

2. g входит в некоторую цепочку ϑ, h не входит ни в какую цепочку;

3. g не входит ни в какую цепочку, h входит в некоторую цепочку ϑ;

4. g и h входят в одну и ту же цепочку ϑ;

5. g входит в цепочку ϑ_1, h входит в цепочку ϑ_2 и $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$.

Рассмотрим случай 5, так как случаи 1–4 — более простые. Тогда $g = \langle e_1, f_1\rangle$, $h = \langle e_2, f_2\rangle$, где $e_1 \in T_{C_{D1}}$, $e_2 \in T_{C_{D2}}$ для $\pi_{D1} = (C_{D1}, \varphi_{D1}), \pi_{D2} = (C_{D2}, \varphi_{D2}) \in \Pi(D)$, $f_1, f_2 \in T_C$ для $\pi = (C, \varphi) \in \Pi(N)$, f_1 и f_2 детализуются в $\overline{C}$ в разные цепочки ϑ_1 и ϑ_2 соответственно. Имеем: $\bar{\beta}(g) \prec_{\overline{C}'} \bar{\beta}(h) \;\Rightarrow\; \bar{\beta}(\langle e_1, f_1\rangle)) \prec_{\overline{C}'} \bar{\beta}(\langle e_2, f_2\rangle) \;\Rightarrow$ (по определению $\bar{\beta}$) $\langle e_1, \beta(f_1)\rangle \prec_{\overline{C}'} \langle e_2, \beta(f_2)\rangle \;\Rightarrow$ (так как единственные связи цепочек с окружением процесса — через их минимальные и максимальные переходы) $\langle e_{max1}, \beta(f_1)\rangle \prec_{\overline{C}'} \langle e_{min2}, \beta(f_2)\rangle \;\Rightarrow$ (по конструкции (*)) $\beta(f_1) \prec_{C'} \beta(f_2) \;\Rightarrow$ (так как $\beta^{-1} : \rho_{C'} \sqsubseteq \rho_C$) $f_1 \prec_C f_2 \;\Rightarrow$ (по конструкции (*)) $\langle e_{max1}, f_1\rangle \prec_{\overline{C}} \langle e_{min2}, f_2\rangle \;\Rightarrow\; \langle e_1, f_1\rangle \prec_{\overline{C}} \langle e_2, f_2\rangle \;\Rightarrow\; g \prec_{\overline{C}} h$. □

Предложение 6.3 *Пусть $\star \in \{i, pw, pom, pr\}$. Для сетей N и N' таких, что $a \in l_N(T_N) \cap l_{N'}(T_{N'})$ и SM-сети D справедливо: $N \underline{\leftrightarrow}_{\star ST} N' \;\Rightarrow\; ref(N, a, D) \underline{\leftrightarrow}_{\star ST} ref(N', a, D)$.*

Доказательство. Пусть $\overline{N} = ref(N, a, D)$, $\overline{N}' = ref(N', a, D)$ и $\mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_{\star ST} N'$, $\star \in \{i, pw, pom, pr\}$.

Конструкция (**)

1. Пусть $(\bar{\pi}_E, \bar{\pi}_P) \in ST - \Pi(\overline{N})$ и $\pi_E, \pi_P \in \Pi(N)$ получены из $\bar{\pi}_E$ и $\bar{\pi}_P$ соответственно с помощью части 1 конструкции (*) из предложения 6.2.

   Лемма 1 $(\pi_E, \pi_P) \in ST - \Pi(N)$.
   Доказательство (леммы 1). Пусть $g, h \in T_{C_E}$ и $g \prec_{C_E} h$. Возможны четыре случая:

   (а) $l_{C_E}(g) \neq a \neq l_{C_E}(h)$;
   (б) $l_{C_E}(g) = a \neq l_{C_E}(h)$;
   (в) $l_{C_E}(g) \neq a = l_{C_E}(h)$;
   (г) $l_{C_E}(g) = a = l_{C_E}(h)$.

   Рассмотрим случай (г), так как случаи (а)–(в) — более простые. Тогда g и h детализуются в $\overline{C}_E$ в разные цепочки ϑ_1 и ϑ_2 с вершинами вида $\langle e_1, g\rangle$ и $\langle e_2, h\rangle$ соответственно, где $e_1 \in T_{C_{D1}}$, $e_2 \in T_{C_{D2}}$ для $\pi_{D1} = (C_{D1}, \varphi_{D1}), \pi_{D2} = (C_{D2}, \varphi_{D2}) \in \Pi(D)$. Имеем: $g \prec_{\overline{C}_E} h \;\Rightarrow$ (по конструкции (*)) $\langle e_{max1}, g\rangle \prec_{\overline{C}_E} \langle e_{min2}, h\rangle \;\Rightarrow$ (так как $(\bar{\pi}_E, \bar{\pi}_P) \in ST - \Pi(\overline{N})$ и $\langle e_{min2}, h\rangle \in T_{\overline{C}_E}$) $\langle e_{max1}, g\rangle \in T_{\overline{C}_P} \;\Rightarrow$ (по конструкции (*)) $g \in T_{C_P}$. □ (Лемма 1)

2. Выберем $(\pi'_E, \pi'_P) \in ST - \Pi(N')$ и β такие, что $((\pi_E, \pi_P), (\pi'_E, \pi'_P), \beta) \in \mathcal{R}$.

3. Получим $\bar{\pi}'_E$ и $\bar{\pi}'_P \in \Pi(\overline{N})$ из π'_E и π'_P соответственно с помощью части 3 конструкции (*) из предложения 6.2.

   Лемма 2 $(\bar{\pi}'_E, \bar{\pi}'_P) \in ST - \Pi(\overline{N}')$.
   Доказательство (леммы 2). Пусть $g', h' \in T_{\overline{C}'_E}$ и $g' \prec_{\overline{C}'_E} h'$. Возможны пять случаев:

   (а) g' и h' не входят ни в какую цепочку;
   (б) g' входит в некоторую цепочку ϑ', h' не входит ни в какую цепочку;
   (в) g' не входит ни в какую цепочку, h' входит в некоторую цепочку ϑ';
   (г) g' и h' входят в одну и ту же цепочку ϑ';
   (д) g' входит в цепочку ϑ'_1, h' входит в цепочку ϑ'_2 и $\vartheta'_1 \neq \vartheta'_2$.

Рассмотрим случай (д), так как случаи (а)–(г) — более простые. Тогда $g' = \langle e_1, f_1' \rangle$, $h' = \langle e_2, f_2' \rangle$, где $e_1 \in T_{C_{D1}}$, $e_2 \in T_{C_{D2}}$ для $\pi_{D1} = (C_{D1}, \varphi_{D1}), \pi_{D2} = (C_{D2}, \varphi_{D2}) \in \Pi(D)$, $f_1', f_2' \in T_{C'}$ для $\pi' = (C', \varphi') \in \Pi(N')$, f_1' и f_2' детализуются в $\overline{C}'_E$ в разные цепочки ϑ_1' и ϑ_2' соответственно. Имеем: $g' \prec_{\overline{C}'_E} h' \Rightarrow \langle e_1, f_1' \rangle \prec_{\overline{C}'_E} \langle e_2, f_2' \rangle \Rightarrow$ (так как единственные связи цепочек с окружением процесса — через их минимальные и максимальные переходы) $\langle e_{max1}, f_1' \rangle \prec_{\overline{C}'_E} \langle e_{min2}, f_2' \rangle \Rightarrow$ (по конструкции (*)) $f_1' \prec_{C'_E} f_2' \Rightarrow$ (так как $(\pi'_E, \pi'_P) \in ST-\Pi(N')$) $f_1' \in T_{C'_P} \Rightarrow$ (по конструкции (*)) $g' = \langle e_1, f_1' \rangle \in T_{\overline{C}'_P}$. □ (Лемма 2)

4. Пусть $g \in T_{\overline{C}_E}$. Определим отображение $\bar{\beta}$ следующим образом:

$$\bar{\beta}(g) = \begin{cases} \beta(g), & g \text{ не входит ни в какую цепочку;} \\ \langle e, \beta(f) \rangle, & g = \langle e, f \rangle \text{ входит в некоторую цепочку } \vartheta. \end{cases}$$

□ (Конструкция (**))

Пусть $\mathcal{S}$ состоит из элементов вида $((\bar{\pi}_E, \bar{\pi}_P), (\bar{\pi}'_E, \bar{\pi}'_P), \bar{\beta})$, полученных с помощью конструкции (**) из элементов $((\pi_E, \pi_P), (\pi'_E, \pi'_P), \beta) \in \mathcal{R}$. Докажем, что $\mathcal{S} : \overline{N} \underline{\leftrightarrow}_{\star ST} \overline{N}'$.

1. Очевидно, $((\pi_{\overline{N}}, \pi_{\overline{N}}), (\pi_{\overline{N}'}, \pi_{\overline{N}'}), \emptyset) \in \mathcal{S}$.
2. Пусть $((\bar{\pi}_E, \bar{\pi}_P), (\bar{\pi}'_E, \bar{\pi}'_P), \bar{\beta}) \in \mathcal{S}$. Очевидно, что по конструкции (**) верно $\bar{\beta} : \rho_{\overline{C}_E} \approx \rho_{\overline{C}'_E}$ и $\bar{\beta}(T_{\overline{C}_P}) = T_{\overline{C}'_P}$, так как $\beta(T_{C_P}) = T_{C'_P}$.
3. Пусть $((\bar{\pi}_E, \bar{\pi}_P), (\bar{\pi}'_E, \bar{\pi}'_P), \bar{\beta}) \in \mathcal{S}$ и $(\bar{\pi}_E, \bar{\pi}_P) \to (\tilde{\bar{\pi}}_E, \tilde{\bar{\pi}}_P)$.

   Элемент $((\bar{\pi}_E, \bar{\pi}_P), (\bar{\pi}'_E, \bar{\pi}'_P), \bar{\beta})$ получен по конструкции (**) из элемента $((\pi_E, \pi_P), (\pi'_E, \pi'_P), \beta) \in \mathcal{R}$. По части 1 конструкции (**) получим $(\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P) \in ST-\Pi(N)$ из $(\tilde{\bar{\pi}}_E, \tilde{\bar{\pi}}_P)$. Очевидно, что $(\pi_E, \pi_P) \to (\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P)$. Так как $\mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_{\star ST} N'$, $\star \in \{i, pw, pom, pr\}$, имеем: $\exists\ \tilde{\beta}$, $(\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P)$ такие, что: $\tilde{\beta}|_{T_{C_E}} = \beta$, $(\pi'_E, \pi'_P) \to (\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P)$ и $((\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P), (\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P), \tilde{\beta}) \in \mathcal{R}$. В соответствии с частями 3 и 4 конструкции (**) получим $(\tilde{\bar{\pi}}'_E, \tilde{\bar{\pi}}'_P) \in ST-\Pi(\overline{N})$ и $\tilde{\bar{\beta}}$ из $(\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P)$ и $\tilde{\beta}$ соответственно.

   Лемма 3 $((\tilde{\bar{\pi}}_E, \tilde{\bar{\pi}}_P), (\tilde{\bar{\pi}}'_E, \tilde{\bar{\pi}}'_P), \tilde{\bar{\beta}}) \in \mathcal{S}$.
   Доказательство (леммы 3). Очевидно из конструкции (**). □ (Лемма 3)

   Лемма 4 $\tilde{\bar{\beta}}|_{T_{\overline{C}_E}} = \bar{\beta}$.
   Доказательство (леммы 4). Пусть $g \in T_{\overline{C}_E}$. Возможны два случая:

   (а) g не входит ни в какую цепочку;

   (б) g входит в некоторую цепочку ϑ.

   Рассмотрим случай (б), так как случай (а) тривиален. Тогда $g = \langle e, f \rangle$, где $e \in T_{C_D}$ для $\pi_D = (C_D, \varphi_D)$, $f \in T_C$ для $\pi = (C, \varphi) \in \Pi(N)$, f детализуются в $\overline{C}_E$ в цепочку ϑ. Имеем: $\tilde{\bar{\beta}}(\langle e, f \rangle) = \langle e, \tilde{\beta}(f) \rangle =$ (так как $f \in T_{C_E}$ и $\tilde{\beta}|_{T_{C_E}} = \beta$) $\langle e, \beta(f) \rangle =$ (по определению $\bar{\beta}$) $\bar{\beta}(\langle e, f \rangle)$. □ (Лемма 4)

   Лемма 5 $(\bar{\pi}'_E, \bar{\pi}'_P) \to (\tilde{\bar{\pi}}'_E, \tilde{\bar{\pi}}'_P)$.
   Доказательство (леммы 5). Следует из того, что $(\pi'_E, \pi'_P) \to (\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}_P)'$ и конструкции (**). □ (Лемма 5)

   Замечание 1 Так как по лемме 4 $\tilde{\bar{\beta}}|_{\overline{C}_E} = \bar{\beta}$ и из $(\bar{\pi}_E, \bar{\pi}_P) \in ST-\Pi(\overline{N})$ следует $\bar{\beta}(T_{\overline{C}_P}) = T_{\overline{C}'_P}$, имеем $\tilde{\bar{\beta}}(T_{\tilde{\overline{C}}_E} \setminus T_{\overline{C}_P}) = T_{\tilde{\overline{C}}'_E} \setminus T_{\overline{C}'_P}$. Следовательно, $\tilde{\bar{\beta}}(T_{\overline{C}}) = T_{\overline{C}'}$. □ (Замечание 1)

   Замечание 2 Так как из того, что $f \in T_{C_P}$, следует $\langle e, f \rangle \in T_{\overline{C}_P}$, то $\langle e, f \rangle \notin T_{\overline{C}_P}$ влечет $f \notin T_{C_P}$. Тогда $\langle e, f \rangle \in T_{\tilde{\overline{C}}_E} \setminus T_{\overline{C}_P} = T_{\overline{C}}$ влечет $f \in T_{\tilde{C}_E} \setminus T_{C_P} = T_C$. □ (Замечание 2)

   Осталось доказать следующие утверждения.

   - $\tilde{\bar{\beta}}^{-1} : \rho_{\overline{C}'} \sqsubseteq \rho_{\overline{C}}$, если $\star = pw$;
   - $\tilde{\bar{\beta}} : \rho_{\overline{C}} \simeq \rho_{\overline{C}'}$, если $\star \in \{i, pom, pr\}$;
   - $\overline{C} \simeq \overline{C}'$, если $\star = pr$.

Рассмотрим случай $\star = pr$, так как случай $\star = pw$ рассматривается, как в предложениии 6.2, а случай $\star = pom$ — более простой. Сначала надо показать, что $\bar{\bar{\beta}} : \rho_{\overline{C}} \simeq \rho_{\overline{C}'}$. Доказательство этого факта аналогично доказательству случая $\star = pw$ предложения 6.2, в котором все импликации заменены на символы "равносильно".

Теперь покажем, что $\overline{C} \simeq \overline{C}'$. Так как $\mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_{prST} N'$, имеем $\exists \alpha : C \simeq C'$. Тогда отображение $\bar{\alpha} : \overline{C} \simeq \overline{C}'$ получается из α следующим образом. Пусть $g \in P_{\overline{C}} \cup T_{\overline{C}}$. Тогда

$$\bar{\alpha}(g) = \begin{cases} \alpha(g), & g \text{ не входит ни в какую цепочку;} \\ \langle e, \alpha(f) \rangle, & g = \langle e, f \rangle \text{ входит в некоторую цепочку } \vartheta. \end{cases}$$

4. Как пункт 3, но роли $\overline{N}$ и $\overline{N}'$ меняются. □

Предложение 6.4 *[3] Для сетей N и N' таких, что $a \in l_N(T_N) \cap l_{N'}(T_{N'})$ и SM-сети D справедливо: $N \underline{\leftrightarrow}_{pomh} N' \ \Rightarrow \ ref(N, a, D) \underline{\leftrightarrow}_{pomh} ref(N', a, D)$.*

Предложение 6.5 *Для сетей N и N' таких, что $a \in l_N(T_N) \cap l_{N'}(T_{N'})$ и SM-сети D справедливо: $N \underline{\leftrightarrow}_{prh} N' \ \Rightarrow \ ref(N, a, D) \underline{\leftrightarrow}_{prh} ref(N', a, D)$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что конструкция, преобразующая отношение бисимуляции на исходных сетях в отношение на детализованных сетях из доказательства предложения 8.5 в [3], сохраняет изоморфизм С-сетей процессов. □

Предложение 6.6 *Пусть $\star \in \{mes, occ\}$. Для сетей N и N' таких, что $a \in l_N(T_N) \cap l_{N'}(T_{N'})$ и SM-сети D справедливо: $N \equiv_\star N' \ \Rightarrow \ ref(N, a, D) \equiv_\star ref(N', a, D)$.*

Доказательство. Пусть $\overline{N} = ref(N, a, D)$, $\overline{N}' = ref(N', a, D)$. Заметим, что О-сети О-процессов SM-сетей — деревья, то есть сети, каждая вершина которых имеет ровно одного предшественника (за исключением единственного входного места).

Конструкция (***)

1. Пусть $\bar{\varpi} = (\overline{O}, \bar{\psi}) \in \wp_{max}(\overline{N})$. Тогда каждая вершина $\overline{O}$, которая не отображается функцией встраивания в множество $P_N \cup T_N$, обладает следующими свойствами:

   - имеет вид $\langle e, f \rangle$ ($e \in P_{O_D} \cup T_{O_D}$, $\varpi_D = (O_D, \psi_D) \in \wp_{max}(D)$ и $f \in T_O$, $\varpi = (O, \psi) \in \wp_{max}(N)$) и отображается функцией встраивания в элемент вида $\langle x, u \rangle$, $x \in T_D \cup (P_D \setminus \{p_{in}, p_{out}\}), u \in l_N^{-1}(a)$;
   - имеет единственного предшественника $\langle e^i_{min}, f \rangle$ $(1 \le i \le n)$, отображаемого функцией встраивания в $\langle t^i_{min}, u \rangle$, $t^i_{min} \in p_{in}^\bullet$;
   - принадлежит единственному максимальному дереву ϑ^i (входящему в совокупность деревьев $\vartheta = \cup_{i=1}^n \vartheta^i$, соответствующую сети O_D), начинающемуся в $\langle e^i_{min}, f \rangle$, все вершины которого отображаются функцией встраивания в элементы вида $\langle y, u \rangle$, $y \in T_D \cup (P_D \setminus \{p_{in}, p_{out}\})$ и единственные связи которого с окружением процесса следующие:
     - через входные места $\langle e^i_{min}, f \rangle$ (всегда);
     - через выходные места максимальных вершин дерева $\langle e^{ij}_{max}, f \rangle$ $(1 \le j \le m)$, которые является переходами, отображаемыми функцией встраивания в $\langle t^{ij}_{max}, u \rangle$, $t^{ij}_{max} \in {}^\bullet p_{out}$.

   Заметим, что все e^i_{min} $(1 \le i \le n)$ имеют одинаковые связи с окружением процесса (как и все e^{ij}_{max} $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$). Следовательно, каждую такую совокупность деревьев ϑ, входящую в сеть $\overline{O}$, можно заменить на переход f, отображаемый функцией встраивания в u, так как они имеют одинаковые входы и выходы. В результате получим О-процесс $\varpi = (O, \psi) \in \wp_{max}(N)$.

2. Так как $N \equiv_\star N'$, $\star \in \{mes, occ\}$, всегда можно выбрать $\varpi' = (O', \psi') \in \wp_{max}(N')$ и β такие, что:

   - $\beta : \xi_O \simeq \xi_{O'}$, если $\star = mes$;
   - $\beta : O \simeq O'$, если $\star = occ$.

3. Для ϑ, сконструированной таким образом, заменим в O' переход $\beta(f)$, встраивающийся в u', на копию ϑ' совокупности деревьев ϑ, где все вершины вида $\langle e, f \rangle$ заменяются на $\langle e, \beta(f) \rangle$. Тогда $\beta(f)$ и ϑ' имеют одинаковые выходы (из u') и одинаковые входы (в u').

   Ясно, что сконструированный таким образом объект — О-процесс $\bar{\varpi}' = (\overline{O}', \bar{\psi}') \in \wp_{max}(\overline{N}')$.

4. Пусть $g \in T_{\overline{O}}$. Определим отображение $\bar{\beta}$ следующим образом:

$$\bar{\beta}(g) = \begin{cases} \beta(g), & g \text{ не входит ни в какую совокупность деревьев;} \\ \langle e, \beta(f) \rangle, & g = \langle e, f \rangle \text{ входит в некоторую совокупность деревьев } \vartheta. \end{cases}$$

□ (Конструкция (***))

Осталось доказать следующие утверждения.

- $\bar{\beta} : \xi_{\overline{O}} \simeq \xi_{\overline{O}'}$, если $\star = mes$;
- $\bar{\beta} : \overline{O} \simeq \overline{O}'$, если $\star = occ$.

Рассмотрим случай $\star = mes$, так как случай $\star = occ$ — более простой. Пусть $g, h \in T_{\overline{O}}$. Возможны пять случаев:

1. g и h не входят ни в какую совокупность деревьев;
2. g входит в некоторую совокупность деревьев ϑ, h не входит ни в какую совокупность деревьев;
3. g не входит ни в какую совокупность деревьев, h входит в некоторую совокупность деревьев ϑ;
4. g и h входят в одну и ту же совокупность деревьев ϑ;
5. g входит в совокупность деревьев ϑ_1, h входит в совокупность деревьев ϑ_2 и $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$.

Рассмотрим случай 5, так как случаи 1–4 — более простые. Тогда $g = \langle e_1, f_1 \rangle$, $h = \langle e_2, f_2 \rangle$, где $e_1 \in T_{O_{D1}}$, $e_2 \in T_{O_{D2}}$ для $\varpi_{D1} = (O_{D1}, \psi_{D1}), \varpi_{D2} = (O_{D2}, \psi_{D2}) \in \wp(D)$, $f_1, f_2 \in T_O$ для $\varpi = (O, \psi) \in \wp(N)$, f_1 и f_2 детализуются в $\overline{O}$ в разные совокупности деревьев ϑ_1 и ϑ_2 соответственно. Докажем сохранение отношений предшествования и конфликта.

- $g \prec_{\overline{O}} h \Leftrightarrow \langle e_1, f_1 \rangle \prec_{\overline{O}} \langle e_2, f_2 \rangle \Leftrightarrow$ (так как единственные связи ϑ_1 и ϑ_2 с окружением процесса — через их минимальные и максимальные переходы и все минимальные (максимальные) переходы имеют с этим окружением одинаковые связи) $\forall i, j, k\ \langle e^{ij}_{max1}, f_1 \rangle \prec_{\overline{O}} \langle e^k_{min2}, f_2 \rangle \Leftrightarrow$ (по конструкции (***)) $f_1 \prec_O f_2 \Leftrightarrow$ (так как $\beta : \xi_O \simeq \xi_{O'}$) $\beta(f_1) \prec_{O'} \beta(f_2) \Leftrightarrow$ (по конструкции (***)) $\forall i, j, k\ \langle e^{ij}_{max1}, \beta(f_1) \rangle \prec_{\overline{O}'} \langle e^k_{min2}, \beta(f_2) \rangle \Leftrightarrow \langle e_1, \beta(f_1) \rangle \prec_{\overline{O}'} \langle e_2, \beta(f_2) \rangle \Leftrightarrow$ (по определению $\bar{\beta}$) $\bar{\beta}(\langle e_1, f_1 \rangle) \prec_{\overline{O}'} \bar{\beta}(\langle e_2, f_2 \rangle) \Leftrightarrow \bar{\beta}(g) \prec_{\overline{O}'} \bar{\beta}(h)$.
- $g \#_{\overline{O}} h \Leftrightarrow \langle e_1, f_1 \rangle \#_{\overline{O}} \langle e_2, f_2 \rangle \Leftrightarrow$ (так как единственные связи ϑ_1 и ϑ_2 с окружением процесса — через их минимальные и максимальные переходы и все минимальные (максимальные) переходы имеют с этим окружением одинаковые связи) $\forall i, k\ \langle e^i_{min1}, f_1 \rangle \#_{\overline{O}} \langle e^k_{min2}, f_2 \rangle \Leftrightarrow$ (по конструкции (***)) $f_1 \#_O f_2 \Leftrightarrow$ (так как $\beta : \xi_O \simeq \xi_{O'}$) $\beta(f_1) \#_{O'} \beta(f_2) \Leftrightarrow$ (по конструкции (***)) $\forall i, k\ \langle e^i_{min1}, \beta(f_1) \rangle \#_{\overline{O}'} \langle e^k_{min2}, \beta(f_2) \rangle \Leftrightarrow \langle e_1, \beta(f_1) \rangle \#_{\overline{O}'} \langle e_2, \beta(f_2) \rangle \Leftrightarrow$ (по определению $\bar{\beta}$) $\bar{\beta}(\langle e_1, f_1 \rangle) \#_{\overline{O}'} \bar{\beta}(\langle e_2, f_2 \rangle) \Leftrightarrow \bar{\beta}(g) \#_{\overline{O}'} \bar{\beta}(h)$. □

Предложение 6.7 *Для сетей N и N' таких, что $a \in l_N(T_N) \cap l_{N'}(T_{N'})$ и SM-сети D справедливо: $N \simeq N' \Rightarrow ref(N, a, D) \simeq ref(N', a, D)$.*

Доказательство. Очевидно. □

Теорема 6.1 *Пусть $\leftrightarrow \in \{\equiv, \underline{\leftrightarrow}, \simeq\}$ и $\star \in \{\_, i, s, pw, pom, pr, iST, pwST, pomST, prST, pomh, prh, mes, occ\}$. Для сетей N и N' таких, что $a \in l_N(T_N) \cap l_{N'}(T_{N'})$ и SM-сети D справедливо: $N \leftrightarrow_\star N' \Rightarrow ref(N, a, D) \leftrightarrow_\star ref(N', a, D)$ тогда и только тогда, когда эквивалентность $\leftrightarrow_\star$ заключена в овал на рисунке 8.*

Доказательство. Используя предложения 6.1-6.7. □

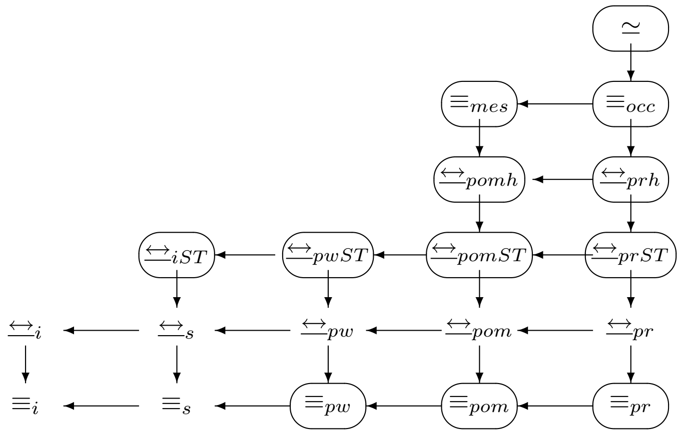

Рис. 8: Сохранение эквивалентностей при SM-детализациях

7 Заключение

В данной работе была исследована и дополнена новыми понятиями группа базисных поведенческих эквивалентностей, которые могут быть использованы для рассмотрения систем, моделируемых сетями Петри, на различных уровнях абстракции.

Основной результат работы состоит в установлении взаимосвязей между эквивалентностными понятиями как на всем классе сетей Петри, так и на подклассе последовательных сетей. Все рассмотренные эквивалентности проверены на сохранение при SM-детализациях. Таким образом, мы можем использовать эквивалентностные понятия, которые сохраняются при SM-детализациях, для разработки параллельных систем по методу “сверху-вниз”.

Укажем некоторые направления дальнейших исследований.

Одно из таких направлений — получение полной картины взаимосвязей эквивалентностей на строго помеченных сетях (все переходы помечены разными действиями) и на T-сетях (нет конфликтных переходов). Заметим, что автором доказано совпадение некоторых эквивалентностей на двух этих подклассах сетей Петри [12, 13].

Мы намерены также расширить область исследований на сети с τ-переходами (которые помеченны невидимыми τ-действиями). Так как это более широкий класс сетей, некоторые связи между эквивалентностями на таких сетях, возможно, перестанут существовать. Например, в [14] показано, что на структурах событий с τ-действиями ST- и сохраняющие историю бисимуляционные эквивалентности независимы.

Еще одно направление дальнейшей работы состоит в исследовании бисимуляционных эквивалентностей мест [1]. Мы намерены сравнить их с эквивалентностными отношениями, рассмотренными в данной работе (например, до сих пор неизвестны взаимосвязи между бисимуляционными эквивалентностями мест и ST-, сохраняющими историю бисимуляционными эквивалентностями). Кроме того, имеет смысл проверить бисимуляционные эквивалентности мест на сохранение при детализациях для установления возможности их использования для разработки многоуровневых параллельных систем.

Благодарности Я благодарен моему научному руководителю Ирине Б. Вирбицкайте за множество важных советов и предложений.

Данная работа была написана во время работы автора в Институте информатики г. Хильдесхайма, Германия. Я выражаю благодарность директору института Айке Бесту за создание благоприятной рабочей атмосферы, а также за полезные обсуждения, замечания и вопросы. Я признателен также исследователю Института информатики Тому Тильке за советы, помогшие улучшить первоначальный вариант статьи.

Список литературы

[1] Autant C., Schnoebelen Ph. *Place bisimulations in Petri nets. LNCS* **616**, p. 45–61, June 1992.

[2] Best E., Devillers R. *Sequential and concurrent behaviour in Petri net theory. TCS* **55**, p. 87–136, 1987.

[3] Best E., Devillers R., Kiehn A., Pomello L. *Concurrent bisimulations in Petri nets.* Acta Informatica **28**, p. 231–264, 1991.

[4] Boudol G., Castellani I. *On the semantics of concurrency: partial orders and transition systems. LNCS* **249**, p. 123–137, 1987.

[5] Engelfriet J. *Branching processes Petri nets. Acta Informatica* **28**(6), p. 575–591, 1991.

[6] van Glabbeek R.J., Vaandrager F.W. *Petri net models for algebraic theories of concurrency. LNCS* **259**, p. 224–242, 1987.

[7] Hoare C.A.R. *Communicating sequential processes, on the construction of programs.* (McKeag R.M., Macnaghten A.M., eds.) Cambridge University Press, p. 229–254, 1980.

[8] Nielsen M., Thiagarajan P.S. *Degrees of non-determinizm and concurrency: a Petri net view. LNCS* **181**, p. 89–117, December 1984.

[9] Park D.M.R. *Concurrency and automata on infinite sequences. LNCS* **104**, p. 167–183, March 1981.

[10] Pomello L. *Some equivalence notions for concurrent systems. An overview. LNCS* **222**, p. 381–400, 1986.

[11] Rabinovitch A., Trakhtenbrot B.A. *Behaviour structures and nets. Fundamenta Informaticae* **XI**, p. 357–404, 1988.

[12] Tarasyuk I.V. *An investigation of equivalence notions on some subclasses of Petri nets. Bulletin of the Novosibirsk Computing Center* **3** (Series Computer Science), p. 89–101, Computing Center, Novosibirsk, 1995.

[13] Tarasyuk I.V. *Equivalence notions for design of concurrent systems using Petri nets. Hildesheimer Informatik-Bericht* **4/96**, part 1, 19 p., Institut für Informatik, Universität Hildesheim, Hildesheim, Germany, January 1996.

[14] Vogler W. *Bisimulation and action refinement. LNCS* **480**, p. 309–321, 1991.