
СТОХАСТИЧЕСКИЕ СЕТИ ПЕТРИ — ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

И. В. Тарасюк

Сети Петри (СП) — известная формальная модель, используемая для качественного анализа поведения дискретных динамических систем. Стохастические сети Петри (ССП) — расширение СП возможностью исследования производительности таких систем, т. е. количественного поведенческого анализа. Изучение поведения моделируемой системы заключается в построении стохастического процесса на основе соответствующей SSP и его исследовании. В настоящее время имеется много подходов к определению SSP. Например, разработаны SSP с непрерывным и дискретным временем, разными типами временных задержек переходов, приоритетами и ингибиторными дугами. Вводятся также другие расширения структуры и поведения SSP для удобства решения конкретных задач количественного моделирования. В этой статье дается описание наиболее распространенных классов SSP и связанных с ними методов анализа, проводится их сравнение. Даются примеры использования, описываются области применения разных типов SSP, а также способы введения пометки переходов для проверки на поведенческую эквивалентность.

Ключевые слова: обычные, ингибиторно-приоритетные и стохастические сети Петри, распределения вероятностей, марковские процессы и цепи, преходящие и стабильные состояния, пометка, эквивалентность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Сети Петри (СП) — признанный инструмент моделирования и функционального анализа параллельных и распределенных вычислительных систем и процессов [3, 56, 57, 59]. СП позволяют естественно описывать синхронизацию, параллелизм, конфликт и причинную зависимость, а также наглядно представлять структуру и поведение систем. Для СП разработано множество аналитических методов. Удобство формализма СП было продемонстрировано на множестве практических приложений.

Однако классические СП не могут быть использованы для анализа количественных параметров, таких как время отклика или производительность.

Поэтому были разработаны *временные сети Петри (ВСП)* [50, 55], дополнение базовой модели СП временными спецификациями. ВСП используются для построения всех возможных протоколов функционирования систем с учетом временных ограничений. Затем проводится анализ таких историй выполнения. Было предложено множество типов ВСП, в которых время различным образом ассоциировалось с местами [61], переходами [50], дугами сетей или даже фишками, в случае высокоуровневых моделей с цветными фишками [5, 40]. Однако наибольшее распространение получили ВСП с временными ограничениями на переходы, поскольку они представляют активности (действия) моделируемых систем, а действия требуют времени для выполнения. Были определены ВСП с разными видами временных задержек: детерминированными [54, 58, 60, 61, 76] или недетерминированными (чаще интервальными) [5, 6, 8, 11, 50], заданными натуральными или неотрицательными действительными числами. Хотя модели с детерминированными задержками проще анализировать, они менее применимы на практике, так как в реальных системах длительности действий обычно варьируются. Поэтому во многих работах, посвященных ВСП, стали использоваться ВСП с задержками переходов, заданными временными интервалами. В [7, 9] приводятся сравнения различных способов введения времени в модель СП. Платой за введение времени стала неразрешимость многих свойств ВСП вследствие изменения характера их функционирования под влиянием временных ограничений. Из-за того, что переходы ВСП должны ждать определенное количество шагов, отдельные ветви вычислений исходной СП остаются нереализованными в ВСП. С другой стороны, временные задержки порождают множество новых вариантов функционирования ВСП. Поэтому структура графа достижимости ВСП существенно отличается от графа исходной СП. В целом, анализ ВСП довольно сложен из-за того, что при определении следующего состояния системы необходимо учитывать, сколько времени прошло с момента допуска каждого перехода.

Другое временное расширение СП, *стохастические сети Петри (ССП)*, — модель количественного анализа дискретных динамических систем событий, разработанная в начале 1980-х [27, 51] и основанная на концепции стохастических временных задержек. В [62, 63] была предложена аналогичная модель, названная *числовые сети Петри (ЧСП)*. СП объединяют многочисленные достоинства СП с возможностью оценки количественных характеристик более естественным образом, чем ВСП, поскольку многие реальные процессы лучше описываются вероятностными моделями. СП являются, по существу, высокоуровневым языком

спецификации и анализа производительности вычислительных систем. Для облегчения анализа используются лишь определенные распределения вероятностей временных задержек, которые, в большинстве случаев, адекватны реальному характеру функционирования моделируемых систем.

Переходам ССП сопоставляются условные вероятности их срабатывания или параметры распределения задержек срабатывания. При этом вероятности смен маркировок оказываются распределенными, соответственно, по дискретной или непрерывной временной шкале. Сначала рассматривались только *ССП с непрерывным временем (НВССП)* [27, 51]. Позже, в [52], были введены *ССП с дискретным временем (ДВССП)*. ДВССП описаны также в [7, 20, 74]. Стандартно в качестве временной области непрерывные модели используют неотрицательные действительные числа, а дискретные — натуральные числа. В непрерывных моделях обычно используется экспоненциальное (показательное) распределение вероятностей, а в дискретных — геометрическое (особый случай распределения Бернулли). Это обусловлено замечательным свойством “забывчивости” таких распределений, состоящим в том, что вероятность текущей смены состояний зависит только от вероятности предыдущей. Поэтому отпадает необходимость сохранять информацию об истории функционирования, предшествующей последней смене состояний, как это принято в ВСП. В контексте ССП это означает, что можно не делать различия между распределением задержки в целом и остаточной задержки.

Заметим, что даже в ВСП с временными интервалами срабатывания задержки переходов могут произвольным образом принимать любые значения из этих отрезков. Можно считать, что значения задержек выбираются с одинаковой вероятностью, что является слишком большим допущением при спецификации реальных систем. Обычно в вычислительных системах, особенно имеющих разделяемые ресурсы, задержки срабатывания компонент не только в разной степени варьируются, что отражается концепцией временных интервалов ВСП. Дополнительно задержки с определенной закономерностью принимают некоторые значения из интервалов чаще, чем другие, и в этом можно найти определенную статистическую упорядоченность. Поэтому вполне естественным является сопоставление распределений вероятностей времени задержки с переходами, моделирующими такие элементарные вычислительные активности. Далее, в ВСП, по сравнению с СП, не вполне естественным образом происходит выбор для срабатывания одного из нескольких конфликтных переходов. Часто совершенно неопределенный выбор в исходной СП преобразуется в построенной на ее основе ВСП в форсирование срабатывания перехода с наименьшей задержкой, т. е. в детерминированный выбор. В ССП связанные с переходами вероятности задержек

допускают варьирование ситуаций от полного недетерминизма через вероятностный выбор до детерминизма. Чистый недетерминизм выбора в ССП соответствует ситуации, когда конфликтные переходы имеют одинаковые распределения задержек. Таким образом, ССП более удобны для анализа и точнее моделируют известные из практики вычислительные процессы, чем ВСП. Как отмечено в [33], ВСП пригодны для спецификации и анализа систем реального времени, таких как управление процессами, производственные системы, роботы, авиационные системы. ССП лучше подходят в качестве моделей систем с разделением ресурсов, таких как компьютеры с разделяемым временем, архитектуры “клиент–сервер”, коммуникационные системы и производственные линии.

В литературе был введен ряд расширений ССП. Так, в [21, 43, 45, 46, 48] определен класс *обобщенных ССП (ОССП)*, имеющих экспоненциальные (с экспоненциально распределенной задержкой) и мгновенные (с нулевой задержкой) переходы. Были определены расширения ОССП неэкспоненциальными задержками переходов как общего вида, так и имеющими распределения Эрланга, гиперэкспоненциальное и фазовое [37, 44]. Разработана комбинация ОССП и очередей [10]. В [24] предложены ССП с задержками общего вида, *расширенные ССП (РССП)*. Была разработана также модель с экспоненциальными и детерминированными (с фиксированной задержкой) переходами, названная *детерминированные ССП (ДССП)* [47, 49], являющаяся обогащением ОССП. *Расширенные ДССП (РДССП)*, определенные в [30], могут иметь недетерминированные переходы с неэкспоненциальными задержками. В работах [72, 73] введены *детерминированные ДВССП (ДДВССП)*, являющиеся обобщением ДВССП посредством введения детерминированных переходов в дополнение к стандартным для ДВССП геометрическим (с геометрически распределенной задержкой). В [39] определены *обобщенные ВСП (ОВСП)* с детерминированными переходами, имеющими частоты срабатывания. Анализ ОВСП производится посредством исследования связанных с ними стохастических процессов. В [7, 18] сравниваются различные расширения НВССП и ДВССП.

Анализ ССП стандартно проводится с помощью *марковских процессов (МП)* с дискретным множеством состояний, называемых *марковскими цепями (МЦ)*. Так, стохастический процесс, соответствующий НВССП, — *цепь Маркова с непрерывным временем (НВМЦ)*. ДВССП возможно сопоставить *цепь Маркова с дискретным временем (ДВМЦ)*. МЦ имеют хорошее свойство “забывчивости” истории функционирования. То есть, если некоторый переход срабатывает, меняя маркировку, распределение остаточного времени для других допустимых в текущей маркировке переходов должно быть таким, как если бы они только что стали допустимыми. Только экспоненциальное и геометрическое распре-

деления обладают этим свойством. МЦ генерируются на основе ССП и анализируются с помощью хорошо разработанных алгоритмов и методик. Динамику ОССП можно описать полумарковской цепью (ПМЦ), т. е. посредством встроенной ДВМЦ (ВДВМЦ), игнорирующей время пребывания в каждом состоянии, и последующей ассоциацией распределения времени пребывания с каждым состоянием ВДВМЦ. ДССП анализируются с помощью ПМЦ, если одновременно допустимо не более одного детерминированного перехода и используется специальная методика определения времени допуска переходов. ДДВССП можно исследовать без ограничений на количество допустимых в маркировке детерминированных переходов, так как фиксированные задержки — частный случай геометрических. Модели с некоторыми другими типами неэкспоненциальных расширений также можно анализировать с помощью МЦ.

В НВССП переходы срабатывают по отдельности в моменты непрерывного времени. Таким образом, семантика этой модели — *интерливинговая*. Это означает, что параллельные вычисления моделируются их чередованием, т. е. интерливингом. В ДВССП, в отличие от НВССП, переходы срабатывают параллельно, в так называемых “шагах”, в определенные моменты дискретного времени. Поэтому данная модель имеет *шаговую* семантику. Параллельные вычисления интерпретируются этой семантикой как последовательности параллельных действий. Как отмечено в [7], хотя в большинстве ССП используются непрерывные задержки, дискретное время позволяет вводить произвольные конечные распределения для ДВССП с сохранением приемлемой анализируемости модели. Попытки же ввести произвольные распределения задержек в НВССП делают практически невозможным точный аналитический анализ. Кроме того, дискретность времени — не такое серьезное ограничение, поскольку непрерывную временную шкалу можно приблизить “мелкозернистой” дискретной. Поэтому ДВССП выглядит более перспективной моделью как по способу представления параллелизма, так и по вычислительной сложности их исследования.

В [15] введена пометка переходов НВССП, а в [16] — переходов ОССП элементарными действиями. В [14] разработана пометка переходов ДВССП. Пометка используется для представления процессов, содержащих функционально сходные компоненты. Переходы, моделирующие такие компоненты, помечаются символом одного и того же действия, обозначающего определенную функцию или некоторое элементарное вычисление. Пометка позволяет сравнивать ССП с помощью различных поведенческих эквивалентностей [14, 15, 19, 42]. Таким образом, появляется возможность проверять на функциональное сходство стохастические процессы, моделируемые с помощью ССП. Поэтому помеченные ССП стали удобным формализмом как для количественного, так и для срав-

нительного качественного анализа стохастических процессов.

В этой работе дается описание наиболее важных типов ССП, методов их анализа и вычисления временных характеристик. Проводится сравнение представленных моделей и обозначаются области их применения. Обсуждается, каким образом можно ввести пометку переходов рассмотренных ССП для их последующей проверки на поведенческую эквивалентность. Даются примеры использования разных типов ССП. Статья построена следующим образом. В разделе 2 приводятся основные понятия теории сетей Петри, вероятностей, стохастических процессов и цепей Маркова. Раздел 3 посвящен ДВССП. В разделе 4 дается описание НВССП. Расширение НВССП мгновенными переходами, ОССП, вводится в разделе 5. Обогащение ОССП детерминированными переходами, ДССП, определяется в разделе 6. В заключительном разделе 7 проводится краткое сравнение описанных формализмов и обсуждаются направления дальнейших исследований в области СП со стохастическим поведением.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В этом разделе определяются основные понятия, используемые в тексте.

2.1. Обычные сети Петри

Основы теории обычных сетей Петри можно найти в [3, 56, 59].

Определение 2.1. Пусть X — некоторое множество. Конечное мультимножество M над X — отображение $M : X \rightarrow \mathbb{N}$, такое что $|\{x \in X \mid M(x) > 0\}| < \infty$.

\mathbb{N}_f^X обозначает множество всех конечных мультимножеств над X . Для $x \in X$, $M(x)$ — кратность x в мультимножестве M . Когда $\forall x \in X M(x) \leq 1$, M — обычное множество. Мощность мультимножества M вводится так: $|M| = \sum_{x \in X} M(x)$. Пишем $x \in M$, если $M(x) > 0$, и $M \subseteq M'$, если $\forall x \in X M(x) \leq M'(x)$. Определим

$$(M + M')(x) = M(x) + M'(x) \quad \text{и} \quad (M - M')(x) = \max\{0, M(x) - M'(x)\}.$$

Символ \emptyset обозначает пустое мультимножество.

Определение 2.2. Сеть Петри (СП) — пятерка

$$N = (P_N, T_N, W_N, L_N, M_N),$$

где

- $P_N = \{p, q, \dots\}$ — множество мест;
- $T_N = \{t, u, \dots\}$ — множество переходов ($P \cup T \neq \emptyset$ и $P_N \cap T_N = \emptyset$);
- $W_N : (P_N \times T_N) \cup (T_N \times P_N) \rightarrow \mathbb{N}$ — функция весов дуг между местами и переходами и наоборот;
- $L_N : T_N \rightarrow Act_\tau$ — функция пометки переходов символами **видимых действий** из конечного множества $Act = \{a, b, \dots\}$ или символом **невидимого, внутреннего действия** τ (т. е. $Act_\tau = Act \cup \{\tau\}$);
- $M_N \in \mathbb{N}_f^{P_N}$ — начальная маркировка.

На рис. 1 приведено графическое представление СП. Места изображаются окружностями, переходы — квадратами, в которые вписаны символы действий, помечающие эти переходы. Названия мест и переходов помещены рядом с ними (их часто не указывают, когда в этом нет необходимости). Функция весов дуг изображается направленными дугами, соединяющими места с переходами и переходы с местами. Количество дуг соответствует значению этой функции на соответствующей паре место–переход (или переход–место). Если это количество больше единицы, оно записывается соответствующей цифрой возле дуги. Маркировка изображается размещением в местах черных точек, “фишек”, количество которых равно кратности в ней соответствующих мест. Число фишек, большее единицы, обычно записывается соответствующей цифрой.

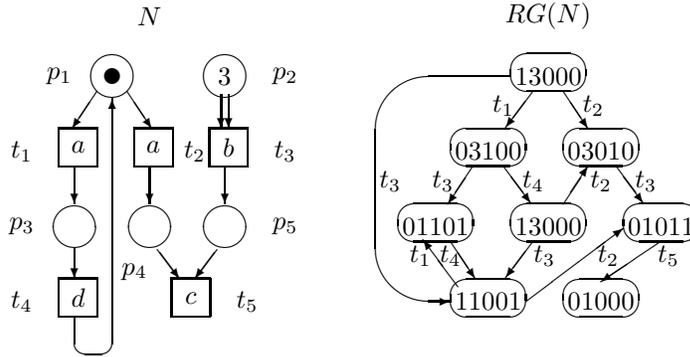


Рис. 1. СП и ее граф достижимости.

СП N — *непомеченная*, если $L_N = id_{T_N}$, так что из определения СП можно исключить функцию пометки L_N , поскольку имена переходов являются их пометками. В графическом представлении это выражается в отсутствии символов действий в квадратах переходов.

Пусть $t \in T_N$. *Предусловие* $\bullet t$ и *постусловие* $t \bullet$ перехода t — множества мест, определяемые как $(\bullet t)(p) = W_N(p, t)$ и $(t \bullet)(p) = W_N(t, p)$.

Пусть $M \in N_f^{P_N}$ — маркировка СП N . Переход $t \in T_N$ *допустим* в M , если $\bullet t \subseteq M$. То есть для допуска перехода во всех местах, из которых в него ведут дуги (*входных местах* перехода), должно быть количество фишек, не меньшее кратности этих дуг. Обозначим через $Ena(M)$ множество *всех переходов, допустимых* в M .

Если $t \in Ena(M)$, то срабатывание этого перехода изменяет маркировку M на $\widetilde{M} = M - \bullet t + t \bullet$, обозначение $M \xrightarrow{t} \widetilde{M}$. Таким образом, при срабатывании перехода из его входных мест изымаются фишки в количестве, равном кратности дуг, соединяющих эти места с переходом. Затем в места, в которые из перехода ведут дуги (*выходные места* перехода), помещаются фишки в количестве, равном кратности этих дуг. Пишем $M \rightarrow \widetilde{M}$, если $\exists t \in T_N M \xrightarrow{t} \widetilde{M}$.

Например, начальная маркировка сети N на рисунке 1 в векторной форме есть $M_N = (1, 3, 0, 0, 0)$. В ней допустим переход t_3 , так как в его единственном входном месте p_2 содержатся три фишки, что больше необходимого для допуска количества в две единицы, равному кратности соединяющей p_2 и t_3 дуги. При срабатывании перехода t_3 из места p_2 изымаются две фишки, а в p_5 помещается одна фишка, в соответствии с кратностью дуги между t_3 и p_5 . Это приводит к смене M_N на маркировку $M_1 = (1, 1, 0, 0, 1)$.

Маркировка \widetilde{M} СП N *достижима* из маркировки M этой СП, если $\widetilde{M} = M$ или существуют достижимая из M маркировка \widehat{M} СП N такая, что $\widehat{M} \rightarrow \widetilde{M}$. Маркировка M сети N *достижимая*, если она достижима из M_N . Обозначим через $RS(N, M)$ множество *всех достижимых* из M маркировок СП N и через $RS(N)$ — множество *всех достижимых* маркировок (*множество достижимости*) СП N .

Граф достижимости СП N — ориентированный граф $RG(N)$ с множеством вершин $RS(N)$ и дугами, ведущими из вершины M в \widetilde{M} , если $M \rightarrow \widetilde{M}$. Дуги могут быть помечены именами соответствующих переходов или их пометками.

На рис. 1 представлен граф достижимости $RG(N)$ изображенной здесь же СП N , дуги которого помечены именами переходов.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. СП N *n-ограниченная*, если $\forall M \in RS(N) \forall p \in P_N M(p) \leq n$, т. е. при любой достижимой маркировке во всех местах СП содержится не более n фишек. СП N *ограниченная*, если $\exists n \in \mathbb{N}$ такое, что она n -ограниченная. СП N *безопасная*, если она 1-ограниченная.

СП N *живая*, если $\forall t \in T_N \exists M \in RS(N) t \in Ena(M)$, т. е. любой переход допустим в некоторой достижимой маркировке. Маркировка \widetilde{M} СП N *возвратная*, если $\forall M \in RS(N) \widetilde{M} \in RS(N, M)$, т. е. из любой достижимой маркировки можно вернуться в \widetilde{M} . СП N *возвратная*, если M_N — возвратная.

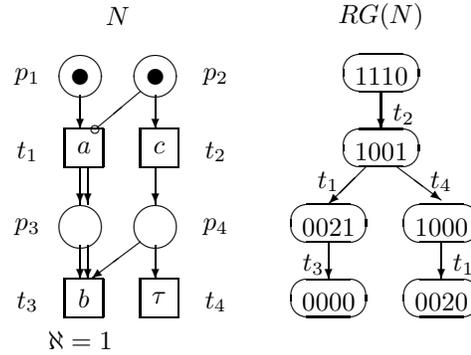


Рис. 2. ИПСП и ее граф достижимости.

Пусть $U \in \mathbb{N}_f^{T_N}$. Предусловие $\bullet U$ и постусловие $U \bullet$ мультимножества переходов U — мультимножества, определяемые как $\bullet U = \sum_{t \in U} \bullet t$ и $U \bullet = \sum_{t \in U} t \bullet$.

Пусть M — маркировка СП N . Мультимножество переходов $U \in \mathbb{N}_f^{T_N}$ допустимо в M , если $\bullet U \subseteq M$. Если U допустимо в M , то срабатывание этого мультимножества изменяет маркировку M на $\tilde{M} = M - \bullet U + U \bullet$, обозначение $M \xrightarrow{U} \tilde{M}$.

2.2. Сети Петри с ингибиторными дугами и приоритетами

Основы теории сетей Петри с ингибиторными дугами и приоритетами можно найти в [3, 56, 59].

Определение 2.3. Сеть Петри с ингибиторными дугами и приоритетами (ИПСП) — шестерка $N = (P_N, T_N, W_N, L_N, H_N, \aleph_N, M_N)$, где

- $(P_N, T_N, W_N, L_N, M_N)$ — СП;
- $H_N : (P_N \times T_N) \rightarrow \mathbb{N}$ — функция весов ингибиторных дуг;
- $\aleph_N : T_N \rightarrow \mathbb{N}$ — функция приоритетов переходов.

На рис. 2 приведено графическое представление ИПСП. Ингибиторные дуги имеют на конце окружность вместо стрелки. Приоритеты указываются возле переходов посредством символа \aleph . Приоритет 0 обычно не изображается.

ИПСП N — *непомеченная*, если $L_N = id_{T_N}$, так что из определения ИПСП можно исключить функцию пометки L_N , поскольку имена переходов являются их пометками. В графическом представлении это выражается в отсутствии символов действий в квадратах переходов.

Из-за наличия ингибиторных дуг и приоритетов необходимо изменить понятие допустимого перехода. Пусть $t \in T_N$. *Отрицательное пред-*

условие ${}^\circ t$ перехода t — мультимножество мест, определяемое как $({}^\circ t)(p) = H_N(p, t)$.

Пусть M — маркировка ИПСП N . Переход t имеет разрешение в M , если $\bullet t \subseteq M$ и выполняется одно из следующих условий: ${}^\circ t = \emptyset$ или ${}^\circ t \not\subseteq M$. То есть переход не имеет разрешения, если во всех местах, соединенных с ним ингибиторными дугами, содержится количество фишек, не меньше кратности этих дуг. Заметим, что для ИПСП с ординарными (имеющими кратность 1) ингибиторными дугами это условие эквивалентно требованию ${}^\circ t \cap M = \emptyset$. Обозначим через $Concess(M)$ множество всех переходов, имеющих разрешение в M . Переход t допустим в M , если $\forall u \in Concess(M) \aleph_N(t) \geq \aleph_N(u)$, т. е. не существует переходов с большим, чем у t , приоритетом, имеющих разрешение в M . Обозначим через $Ena(M)$ множество всех переходов, допустимых в M . Смена маркировки происходит так же, как и для обычной СП.

Например, начальная маркировка ИПСП N на рис. 2 в векторной форме есть $M_N = (1, 1, 0, 0)$. В ней допустим переход t_2 , так как в его единственном входном месте p_2 содержится одна фишка, что равно необходимому для допуска количеству, равному кратности соединяющей p_2 и t_2 дуги. При срабатывании перехода t_2 из места p_2 изымается одна фишка, а в p_4 помещается одна фишка, в соответствии с кратностью дуги между t_2 и p_4 . Это приводит к смене M_N на маркировку $M_1 = (1, 0, 0, 1)$. В отличие от t_2 , переход t_1 не допустим в M_N . Хотя в его входном месте p_1 содержится одна фишка, что является достаточным количеством, в месте p_2 , соединенном с t_1 ингибиторной дугой, также имеется одна фишка. Она достаточна для запрета срабатывания этого перехода, как не имеющего разрешения. Но переход t_1 является допустимым в маркировке M_1 , поскольку тогда имеется одна фишка в p_1 и нет фишек в p_2 . Результатом срабатывания t_1 будет маркировка $M_2 = (0, 0, 2, 1)$. В M_2 допустим только переход t_3 , несмотря на количество фишек в местах, достаточное для запуска также и t_4 . Дело в том, что t_3 имеет приоритет 1, а t_4 — только 0. В результате получается маркировка $M_3 = (0, 0, 0, 0)$, в которой не допустим ни один переход.

Понятия, связанные с достижимостью маркировок, ограниченностью, живостью и возвратностью ИПСП, — такие же, как для СП.

На рис. 2 представлен граф достижимости $RG(N)$ изображенной здесь же ИПСП N , дуги которого помечены именами переходов.

2.3. Основы теории вероятностей

В [1, 2, 4] можно найти основные определения теории вероятностей. Описание формальных методов содержится также в [32, 33, 43].

Пусть V — множество элементарных событий и 2^V — множество

всех подмножеств V . Поле случайных событий над V (σ -алгебра подмножеств V) — множество $G \subseteq 2^V$ такое, что

- 1) $V \in G$;
- 2) $A \in G \Rightarrow \bar{A} \in G$ (\bar{A} — дополнение A);
- 3) $A_1, A_2, \dots \in G \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in G$.

Таким образом, σ -алгебра — класс множеств, замкнутый относительно счетного числа операций дополнения, пересечения и объединения.

Вероятностное пространство — тройка $\Sigma = (V, G, P)$, где

- V — множество элементарных событий;
- $G \subseteq 2^V$ — поле случайных событий над V ;
- $P : G \rightarrow [0; 1]$ — вероятностная мера на G .

Случайная величина — переменная величина, значение которой зависит от исхода некоторого случая и для которой определена функция распределения вероятностей.

Определение 2.4. Пусть $\Sigma = (V, G, P)$ — вероятностное пространство. Случайная величина (СВ) — функция $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $\forall x \in \mathbb{R} \{v \in V \mid \xi(v) < x\} \in G$ и $\forall x \in \mathbb{R} P(\xi < x)$ определена.

СВ могут быть дискретными и непрерывными, в зависимости от их области определения.

Функция распределения вероятностей определяет СВ.

Определение 2.5. Функция распределения вероятностей (ФРВ) случайной величины ξ определяется как

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x).$$

ФРВ непрерывной СВ — неотрицательная неубывающая функция, для которой $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{\xi}(x) = 1$.

Определение 2.6. Функция масс вероятностей (ФМВ) дискретной СВ ξ определяется как

$$p_{\xi}(x_i) = P(\xi = x_i) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Функция плотности вероятностей (ФПВ) непрерывной СВ ξ определяется как

$$f_{\xi}(x) = \frac{d}{dx} F_{\xi}(x),$$

если F_{ξ} абсолютно непрерывна или дифференцируема при всех значениях аргумента.

ФМВ дискретной СВ часто записывается в векторной форме как $p_\xi = (p_\xi(x_1), p_\xi(x_2), \dots)$.

ФПВ непрерывной СВ неотрицательна и $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) dx = 1$.

Для дискретной СВ ξ ФРВ есть

$$F_\xi(x_n) = \sum_{i=0}^{n-1} p_\xi(x_i).$$

Для непрерывной СВ ξ ФРВ есть

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(y) dy.$$

Математическое ожидание — средняя величина, около которой концентрируются значения СВ.

Определение 2.7. Математическое ожидание (МО) дискретной СВ ξ определяется как

$$M(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p_\xi(x_i),$$

если этот ряд сходится абсолютно.

Математическое ожидание (МО) непрерывной СВ ξ определяется как

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx,$$

если существует интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x) dx$.

Дисперсия — МО квадрата отклонений СВ от ее МО, играющее роль меры рассеяния (разбросанности) значений СВ относительно ее МО.

Определение 2.8. Дисперсия СВ ξ определяется как

$$D(\xi) = M((\xi - M(\xi))^2).$$

Для дискретной СВ ξ дисперсия есть

$$D(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} (x_i - M(\xi))^2 p_\xi(x_i).$$

Для непрерывной СВ ξ дисперсия есть

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))^2 f_\xi(x) dx.$$

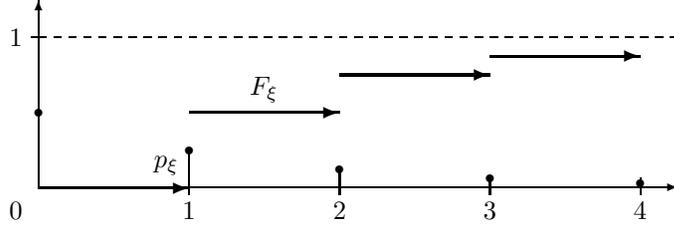


Рис. 3. Графики ФРВ и ФМВ геометрического распределения при $\rho = \frac{1}{2}$.

Справедливо следующее равенство: $D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2$.

Рассмотрим примеры основных распределений, используемых далее.

Дискретное *геометрическое распределение* имеет следующие характеристики:

$$F_{\xi}(n) = P(\xi < n) = 1 - \rho^n \quad (\rho \in (0; 1), n \in \mathbb{N});$$

$$p_{\xi}(i) = P(\xi = i) = \rho^i(1 - \rho) \quad (i \in \mathbb{N});$$

$$M(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} i p_{\xi}(i) = \frac{\rho}{1 - \rho};$$

$$D(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} (i - M(\xi))^2 p_{\xi}(i) = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}.$$

На рис. 3 изображены графики ФРВ И ФМВ геометрического распределения при $\rho = \frac{1}{2}$.

Непрерывное *экспоненциальное распределение* имеет следующие характеристики:

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (\lambda \in \mathbb{R}, x \geq 0);$$

$$f_{\xi}(x) = \frac{d}{dx} F_{\xi}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0);$$

$$M(\xi) = \int_0^{\infty} x f_{\xi}(x) dx = \frac{1}{\lambda};$$

$$D(\xi) = \int_0^{\infty} (x - M(\xi))^2 f_{\xi}(x) dx = \frac{1}{\lambda^2}.$$

На рис. 4 изображены графики ФРВ И ФПВ экспоненциального распределения при $\lambda = 1$.

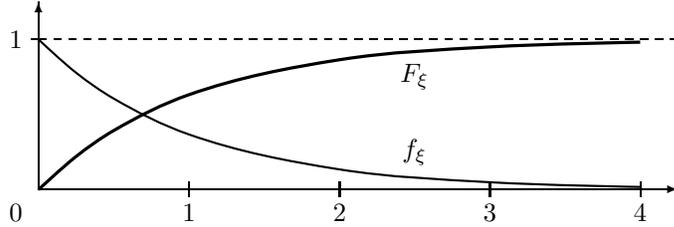


Рис. 4. Графики ФРВ и ФПВ экспоненциального распределения при $\lambda = 1$.

2.4. Стохастические процессы

В [1, 2, 4, 33, 43] можно найти определения стохастических процессов и цепей Маркова.

Пусть (ξ_1, \dots, ξ_n) — вектор из n случайных переменных. Совместная ФРВ определяется как

$$F_{\xi}(x) = P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n).$$

Совместная ФПВ вводится как

$$f_{\xi}(x) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_{\xi}(x).$$

Определение 2.9. Пусть Δ — совокупность параметров (множество индексов) и S — пространство состояний. Стохастический процесс — множество случайных величин $\{\xi(\delta) \mid \delta \in \Delta\} \subseteq S$.

Как правило, δ ассоциируется со временем, Δ — с временной шкалой (обычно, дискретной \mathbb{N} или непрерывной $\mathbb{R}_+ = [0; \infty)$), а S считается множеством возможных значений (состояний) СВ $\xi(\delta)$. Стохастические процессы могут быть дискретными или непрерывными по типу множества состояний. Стохастическая цепь — стохастический процесс с дискретными состояниями. Стохастические цепи могут быть дискретными или непрерывными по типу используемой временной шкалы.

Стохастический процесс *стационарный*, если его свойства не меняются от одновременного сдвига всех состояний по временной шкале.

В общем случае, полная вероятностная характеристика стохастических процессов — сложная задача, требующая описания любого случайного вектора, содержащего произвольное число случайных переменных, полученных из процесса при любом наборе моментов времени. Поэтому были определены специальные классы стохастических процессов, для которых такая характеристика проще. Наиболее важными из них являются процессы Гаусса и Маркова. Гауссовские процессы дают возможность точного моделирования многих естественных явлений, испытывающих

влияние множества произвольных факторов. Марковские процессы лучше подходят для моделирования динамики систем с разделением ресурсов. Марковский процесс — стохастический процесс, будущее которого зависит только от текущего состояния, а не от предыдущих.

Определение 2.10. Пусть для некоторых множеств индексов Δ , состояний S и чисел $i \in \mathbb{N}$ выполняется $\delta_0, \dots, \delta_{i-1}, \delta_i \in \Delta$ ($\delta_0 < \dots < \delta_{i-1} < \delta_i$), $s_0, \dots, s_{i-1}, s_i \in S$. Марковский процесс (МП) — стохастический процесс, для которого справедливо следующее свойство Маркова (отсутствие последствия, забывчивость):

$$P(\xi(\delta_i) = s_i \mid \xi(\delta_0) = s_0, \dots, \xi(\delta_{i-1}) = s_{i-1}) = P(\xi(\delta_i) = s_i \mid \xi(\delta_{i-1}) = s_{i-1}).$$

Марковская цепь (МЦ) — МП с дискретным пространством состояний. Дискретно-временная МЦ (ДВМЦ) — МЦ со сменами состояний (переходами) в моменты времени, множества которых конечны или счетны. Непрерывно-временная МЦ (НВМЦ) — МЦ, смены состояний в которой происходят на конечных или бесконечных интервалах временной оси.

МЦ однородная (гомогенная), если вероятности смен состояний не зависят от момента времени, когда они происходят. Будем предполагать, что все рассматриваемые далее МЦ — однородные.

Необходимо различать переходы МЦ и ССП. Например, смене состояний (переходу) ДВМЦ может соответствовать отказ от срабатывания или срабатывание нескольких переходов ДВССП.

2.5. Цепи Маркова с дискретным временем

Геометрическое распределение — единственное дискретное распределение, для которого справедливо свойство забывчивости, характерное для МЦ:

$$P(\xi = i + j \mid \xi > j) = P(\xi = i) \quad (i, j \in \mathbb{N}, i \geq 1).$$

Поэтому свойство забывчивости требует, чтобы время пребывания в каждом состоянии ДВМЦ (задержка переходов) была геометрически распределенной СВ.

Таким образом, для полного вероятностного описания ДВМЦ достаточно иметь ФМВ над ее пространством состояний $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ в начальный момент времени и вероятности переходов за один шаг по дискретной временной шкале ρ_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) из состояния s_i в s_j .

(Одношаговая) диаграмма вероятностей переходов (ДВП) ДВМЦ — помеченный ориентированный граф с вершинами, соответствующими состояниям из S , и дугами, помеченными вероятностями переходов за один

шаг ρ_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$). ДВП является графическим представлением ДВМЦ.

(Одношаговая) матрица вероятностей переходов (МВП) ДВМЦ — матрица \mathbf{P} размера $n \times n$ над $[0; 1]$ с вероятностями переходов за один шаг $\rho_{ij} = P(\xi(1) = s_j \mid \xi(0) = s_i)$ ($1 \leq i, j \leq n$) в качестве элементов. МВП используется для аналитического решения ДВМЦ. Так как в статье рассматриваются только однородные ДВМЦ, вероятности ρ_{ij} не зависят от момента времени, в который происходит смена состояний. Поэтому можно положить его равным единице, как записано выше.

Можно показать, что матрица \mathbf{P}^k (произведение k матриц \mathbf{P} ($k \in \mathbb{N}$)) имеет в качестве элементов вероятности переходов за k шагов $\rho_{ij}(k) = P(\xi(k) = s_j \mid \xi(0) = s_i)$ ($1 \leq i, j \leq n$). Положим $\mathbf{P}^0 = \mathbf{E}$, где \mathbf{E} — единичная матрица размера $n \times n$, т. е. все ее диагональные элементы — единицы, а остальные — нули.

Уравнение Чепмена—Колмогорова устанавливает отношение между вероятностями перехода за $k + l$ ($k, l \in \mathbb{N}$) шагов с вероятностями смен состояний за k и l шагов. Для однородных ДВМЦ уравнение выглядит следующим образом:

$$\mathbf{P}^{k+l} = \mathbf{P}^k \mathbf{P}^l.$$

Вероятность пребывания в состоянии s_i в течение k шагов и его смены на шаге $k + 1$ есть $\rho_{ii}^k(1 - \rho_{ii})$. Если интерпретировать смену состояния как успех некоторого испытания, а продолжение пребывания в нем — как неудачу, можно убедиться, что время пребывания в состояниях ДВМЦ распределено геометрически.

Решение ДВМЦ заключается в вычислении ФМВ либо в произвольный момент времени, либо при равновесных условиях.

Пусть $\psi_i(k) = P(\xi(k) = s_i)$ ($1 \leq i \leq n$) — вероятность перехода ДВМЦ в состояние s_i за k шагов (из начального состояния) и $\psi(k) = (\psi_1(k), \dots, \psi_n(k))$ — ее ФМВ в момент времени k (преходящая ФМВ), а \mathbf{P} — МВП. Преходящая ФМВ находится из системы итеративных уравнений

$$\psi(k+1) = \psi(k)\mathbf{P}.$$

Следовательно, преходящую ФМВ можно вычислить на основе начальной ФМВ как

$$\psi(k) = \psi(0)\mathbf{P}^k.$$

Преходящая ФМВ важна, когда нужно оценить кратковременное поведение исследуемой системы. Если рассматривать такое временное решение для длительного периода функционирования, можно показать,

что вероятности состояний часто становятся постоянными и работа системы становится стабильной (равновесной). В этом случае говорят, что система перешла в стабильное состояние. Когда существует такая стабильная ФМВ, ДВМЦ называется *эргодической*.

Пусть $\psi_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_i(k)$ ($1 \leq i \leq n$) — вероятность нахождения эргодической ДВМЦ в стабильном состоянии s_i , и $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ — ее *стабильная ФМВ*, а \mathbf{P} — МВП. Числа ψ_i ($1 \leq i \leq n$) — вероятности попадания системы в состояние s_i через достаточно большой временной интервал. Они не зависят от начального состояния системы, т. е. система “забывает”, откуда началось движение. Стабильная ФМВ — решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{P} - \mathbf{E}) = 0, \\ \psi \mathbf{e}^T = 1, \end{cases}$$

где \mathbf{e} — строка из n единиц.

Рассмотрим *условия существования стабильного состояния (эргодичности)* ДВМЦ. Для этого введем ряд необходимых понятий.

Состояние s_i ($1 \leq i \leq n$) ДВМЦ *несущественное*, если $\exists j$ ($1 \leq j \leq n$) $\exists k \in \mathbb{N}$ $\rho_{ij}(k) > 0$ и $\forall l \in \mathbb{N}$ $\rho_{ji}(l) = 0$, т. е. на некотором шаге из s_i можно перейти в некоторое состояние s_j , вернуться обратно из которого невозможно. Состояние s_i *существенное* в противном случае.

Существенные состояния s_i и s_j ($1 \leq i, j \leq n$) ДВМЦ *сообщающиеся*, если $\exists k, l \in \mathbb{N}$ $\rho_{ij}(k) > 0$ и $\rho_{ji}(l) > 0$, т. е. на некоторых шагах можно перейти как из s_i в s_j , так и обратно. Все множество существенных состояний разбивается на непересекающиеся классы сообщающихся состояний S_1, \dots, S_m .

Если класс сообщающихся состояний S_c ($1 \leq c \leq m$) состоит из одного состояния s_i , то оно — *поглощающее*.

ДВМЦ *неразложимая*, если ее множество состояний — единственный класс сообщающихся существенных состояний, и *разложимая* в противном случае.

Вероятность того, что система, выйдя из состояния s_i ($1 \leq i \leq n$), *впервые вернется в него через k шагов* есть

$$Return_i(k) = P(\xi(k) = s_i, \xi(k-1) \neq s_i, \dots, \xi(1) \neq s_i \mid \xi(0) = s_i).$$

Вероятность того, что система, выйдя из состояния s_i ($1 \leq i \leq n$), *когда-нибудь вернется в него* есть

$$Return_i = \sum_{k=1}^{\infty} Return_i(k).$$

Состояние s_i ($1 \leq i \leq n$) неразложимой ДВМЦ *возвратное*, если $Return_i = 1$, и *невозвратное (преходящее)*, если $Return_i < 1$.

Состояние s_i ($1 \leq i \leq n$) неразложимой ДВМЦ *нулевое*, если $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{ii}(k) = 0$, и *ненулевое (положительное)* в противном случае.

Состояние s_i ($1 \leq i \leq n$) неразложимой ДВМЦ *периодическое* с периодом $d_i \in \mathbb{N}$ ($d_i > 1$), если d_i — наибольший общий делитель чисел из множества $\{k \in \mathbb{N} \mid Return_i(k) > 0\}$, т. е. в s_i можно вернуться только за число шагов, кратное d_i , и d_i — наибольшее из таких чисел. Состояние s_i *непериодическое* в противном случае.

В принципе, может быть восемь типов состояний неразложимой ДВМЦ, так как каждый из трех признаков в приведенных выше определениях может присутствовать или отсутствовать. Однако следующая теорема говорит о том, что таких типов всего шесть.

Теорема 2.1. [1] *В неразложимой ДВМЦ невозвратное состояние является нулевым.*

Таким образом, состояния можно классифицировать по двум следующим параметрам.

1. *Асимптотические свойства:* невозвратные, возвратные нулевые, ненулевые.
2. *Арифметические свойства:* периодические, непериодические.

Теорема 2.2 (Солидарность [1]). *В неразложимой ДВМЦ все состояния имеют один тип. То есть если одно из них, то и все они либо возвратные, либо нулевые либо периодические с одинаковым периодом $d \in \mathbb{N}$ ($d \geq 2$).*

Неразложимая ДВМЦ *периодическая*, если ее состояния — периодические с периодом $d \in \mathbb{N}$ ($d \geq 2$), и *непериодическая* в противном случае.

Теорема 2.3 (Эргодичность [1]). *ДВМЦ неразложимая и непериодическая и для некоторого ее состояния s_i среднее время возврата в него конечно,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k Return_i(k) < \infty,$$

тогда и только тогда, когда $\forall i, j$ ($1 \leq i, j \leq n$) существуют независимая от начальной ФМВ $\psi(0)$ и единственная стабильная ФМВ $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, где

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{ij}(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_j(k) = \psi_j > 0.$$

ДВМЦ эргодическая, если для нее существуют стабильная ФМВ.

Известно, что для *конечных* ДВМЦ требование конечности среднего времени возврата в любое ее состояние всегда выполняется. Поэтому

конечная ДВМЦ эргодическая тогда и только тогда, когда она неразложимая и непериодическая.

На рис. 5, а изображена ДВП для ДВМЦ с множеством состояний $S = \{s_1, s_2\}$. Условная вероятность перехода из состояния s_1 в s_2 равна ρ , а обратно — σ .

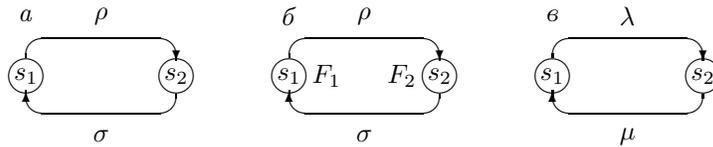


Рис. 5. ДВМЦ, ПМЦ и НВМЦ.

МВП для ДВМЦ такова:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 - \rho & \rho \\ \sigma & 1 - \sigma \end{bmatrix}.$$

2.6. Полумарковские цепи

Полумарковские цепи (ПМЦ) — обобщение ДВМЦ и переходное звено между ними и НВМЦ, определяемыми в следующем разделе. Каждому состоянию ПМЦ s_i сопоставляется положительное время пребывания в нем с функцией распределения $F_i(\delta)$ и плотностью $f_i(\delta)$.

Таким образом, для полного вероятностного описания ПМЦ достаточно иметь ФМВ над ее пространством состояний $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ в начальный момент времени, вероятности переходов за один шаг ρ_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) из состояния s_i в s_j и вектор распределений времени пребывания в состояниях $F(\delta) = (F_1(\delta), \dots, F_n(\delta))$.

(Одношаговая) диаграмма вероятностей переходов (ДВП) ПМЦ — помеченный ориентированный граф с вершинами, соответствующими состояниям из S , около которых указаны ФРВ времени пребывания в них, и дугами, помеченными вероятностями переходов за один шаг ρ_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$). ДВП является графическим представлением ПМЦ.

Интерпретация ПМЦ следующая. В моменты смен состояний ПМЦ ведет себя как ДВМЦ, т. е. переходы между состояниями полностью описываются МВП \mathbf{P} и независимы от прошлого. После перехода в состояние s_i должно пройти время, распределенное в соответствии с $F_i(\delta)$, прежде чем будет возможна следующая смена состояний.

Решение ПМЦ заключается в вычислении ФМВ либо в произвольный момент времени, либо при равновесных условиях.

Для вычисления стабильной ФМВ для ПМЦ сначала обычным образом находится стабильная ФМВ $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ для *встроенной ДВМЦ* (ВДВМЦ), характеризуемой МВП \mathbf{P} .

Затем вычисляется среднее время пребывания в состояниях s_i ($1 \leq i \leq n$) как

$$SJ(s_i) = \int_0^{\infty} \delta f_i(\delta) d\delta.$$

Стабильная ФМВ $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ПМЦ получается умножением каждого ψ_i ($1 \leq i \leq n$) на среднее время пребывания $SJ(s_i)$ в соответствующем состоянии s_i и последующей нормализацией распределения. Таким образом, для $1 \leq i \leq n$ получаем

$$\varphi_i = \frac{\psi_i SJ(s_i)}{\sum_{j=1}^n \psi_j SJ(s_j)}.$$

Вычисление переходящей ФМВ для ПМЦ — значительно более сложная задача, чем для ДВМЦ и НВМЦ. Соответствующие методы вычисления могут быть найдены в [41].

На рис. 5, б изображена ДВП для ПМЦ с множеством состояний $S = \{s_1, s_2\}$ и вектором распределений времени пребывания в состояниях $F(\delta) = (F_1(\delta), F_2(\delta))$. Условная вероятность перехода из состояния s_1 в s_2 равна ρ , а обратно — σ .

МВП для ВДВМЦ, соответствующей этой ПМЦ, такова:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 - \rho & \rho \\ \sigma & 1 - \sigma \end{bmatrix}.$$

2.7. Цепи Маркова с непрерывным временем

Экспоненциальное распределение — единственное непрерывное распределение, для которого справедливо свойство забывчивости, характерное для МЦ:

$$P(\xi \geq x + d \mid \xi \geq d) = P(\xi \geq x) \quad (x, d \in \mathbb{R}_+).$$

Поэтому свойство забывчивости требует, чтобы время пребывания в каждом состоянии НВМЦ (задержка переходов) было экспоненциально распределенной СВ.

Экспоненциальное распределение имеет постоянный параметр λ , трактуемый как темп или скорость перехода в НВМЦ и не зависящий от

предшествующего поведения. Остаточное время пребывания в состоянии — случайная переменная с той же плотностью распределения, как и общее время. То есть оставшееся время пребывания в состоянии не зависит от времени, уже проведенного в нем, а только от текущего состояния. Данное распределение позволяет осуществить относительно простой последовательный анализ моделей (вычисление значений производительности).

Таким образом, для полного вероятностного описания НВМЦ достаточно иметь ФМВ над ее пространством состояний $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ в начальный (обычно нулевой) момент времени и параметры экспоненциального распределения (темпы переходов) q_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) из состояния s_i в s_j .

Диаграмма темпов переходов (ДТП) НВМЦ — помеченный ориентированный граф с вершинами, соответствующими состояниям из S , и дугами, помеченными темпами переходов q_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$). ДТП является графическим представлением НВМЦ.

Матрица темпов переходов (МТП) НВМЦ или *генератор бесконечно малых* — матрица \mathbf{Q} размера $n \times n$ над \mathbb{R}_+ с темпами переходов q_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) в качестве элементов, не принадлежащих главной диагонали. На главной диагонали находятся отрицательные суммы остальных элементов по соответствующим строкам. МТП используется для аналитического решения НВМЦ.

Решение НВМЦ заключается в вычислении ФМВ либо в произвольный момент времени, либо при равновесных условиях.

Пусть $\varphi_i(\delta) = P(\xi(\delta) = s_i)$ ($1 \leq i \leq n$) — вероятность нахождения НВМЦ в состоянии s_i в момент времени δ и $\varphi(\delta) = (\varphi_1(\delta), \dots, \varphi_n(\delta))$ — ее ФМВ в момент времени δ (*преходящая ФМВ*), а \mathbf{Q} — МТП. Поведение МП описывается системой уравнений Чепмена—Колмогорова для вероятностей переходов, из которой можно получить следующую систему дифференциальных уравнений в матричном виде:

$$\frac{d\varphi(\delta)}{d\delta} = \varphi(\delta)\mathbf{Q}.$$

В этой системе уравнений дифференциальному изменению каждой вероятности $\varphi_i(\delta)$ ($1 \leq i \leq n$) состояния s_i в момент δ соответствует разность между вероятностями перехода в него из других состояний и из него в другие состояния в этот момент времени. Преходящая ФМВ — решение системы уравнений

$$\varphi(\delta) = \varphi(0)e^{\mathbf{Q}\delta},$$

где $e^{\mathbf{Q}\delta}$ — матричная экспонента, определяемая как $e^{\mathbf{Q}\delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{Q}\delta)^k}{k!}$.

Когда существует стабильная ФМВ, НВМЦ называется *эргодической*.

Пусть $\varphi_i = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \varphi_i(\delta)$ ($1 \leq i \leq n$) — вероятность нахождения эргодической НВМЦ в стабильном состоянии s_i и $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ — ее *стабильная (равновесная) ФМВ*, а \mathbf{Q} — МТП. Стабильная ФМВ — решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \varphi \mathbf{Q} = 0, \\ \varphi \mathbf{e}^T = 1. \end{cases}$$

Эта система уравнений отражает факт, что переход в каждое состояние i ($1 \leq i \leq n$) из других состояний и переход из него в другие находят в статистическом равновесии.

Условия существования стабильного состояния НВМЦ (эргодичности) аналогичны описанным для ДВМЦ.

На рис. 5, 6 изображена ДТП для НВМЦ с множеством состояний $S = \{s_1, s_2\}$. Темп перехода из состояния s_1 в s_2 равен λ , а обратно — μ . МТП для этой НВМЦ такова:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}.$$

2.8. Общая схема анализа цепей Маркова

Марковские процессы обладают важным преимуществом, состоящим в том, что принципиально известно, как их исследовать. Стандартная техника решения заключается в следующих шагах.

1. Найти все состояния s_i ($1 \leq i \leq n$) множества состояний S .
2. Для ДВМЦ вычислить вероятности переходов за один шаг ρ_{ij} из ее состояния s_i в s_j ($1 \leq i, j \leq n$).
 Для ПМЦ вычислить вероятности переходов за один шаг ρ_{ij} из состояния ВДВМЦ s_i в s_j ($1 \leq i, j \leq n$).
 Для НВМЦ вычислить темпы переходов q_{ij} из ее состояния s_i в s_j ($1 \leq i, j \leq n$).
3. Для ДВМЦ составить итерационную систему линейных уравнений с целью исследования ее преходящего поведения.
 Для ПМЦ составить итерационную систему линейных уравнений с целью исследования преходящего поведения ВДВМЦ.
 Для НВМЦ составить систему уравнений с матричной экспонентой с целью исследования ее преходящего поведения.
4. Для ДВМЦ составить систему линейных уравнений неподвижной точки с целью изучения ее стационарного поведения.
 Для ПМЦ составить систему линейных уравнений неподвижной точки с целью изучения стационарного поведения ВДВМЦ.

Для НВМЦ составить равновесную систему линейных уравнений с целью изучения ее стационарного поведения.

5. Для ДВМЦ и НВМЦ вычислить вероятности состояний аналитическим или численным методом.

Для ПМЦ вычислить вероятности состояний ВДВМЦ аналитическим или численным методом, взвесить их средним временем пребывания в состояниях ПМЦ и нормализовать. В результате получатся вероятности состояний ПМЦ.

6. Получить стандартные меры производительности на основе вероятностей состояний (время функционирования, ожидания и прочие).

3. ССП С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

ССП с дискретным временем (ДВССП) [52] имеют переходы, которым напрямую сопоставляются условные вероятности их срабатывания (для случая, когда никакой другой переход не допустим в данной маркировке). Дискретность времени позволяет допустить срабатывание нескольких (разных) переходов одновременно, что полнее использует возможности СП как модели параллельных систем. Геометрическое распределение временных задержек переходов ДВССП дает возможность анализировать их с помощью ДВМЦ.

3.1. Описание модели

Определение 3.1. *Дискретно-временная ССП (ДВССП) — пятерка $N = (P_N, T_N, W_N, \Omega_N, M_N)$, где:*

- (P_N, T_N, W_N, M_N) — *непомеченная СП;*
- $\Omega_N : T_N \rightarrow (0; 1)$ — *функция условных вероятностей переходов.*

В графическом представлении ДВССП условные вероятности указываются возле соответствующих переходов.

На каждом шаге, т. е. в момент дискретного времени, когда происходит смена маркировки, может сработать либо произвольное число допустимых в маркировке и взаимно не конфликтных переходов, либо ни один из них. Будем рассматривать только множества, а не мультимножества параллельных переходов, так как в последнем случае возникают проблемы с вероятностной интерпретацией такого шага. Для каждого множества срабатывающих вместе переходов необходимо вычислять вероятности. Для этого используются связанные с переходами условные вероятности. Под условием вероятности в данном случае подразумевается ситуация срабатывания переходов как единственно допустимых в некоторой маркировке. Анализ ДВССП включает дополнительный шаг

снятия таких условностей с условных вероятностей. Только после этого возможно определить соответствующую ДВМЦ.

Пусть M — маркировка ДВССП $N = (P_N, T_N, W_N, \Omega_N, M_N)$. Тогда переход $t \in \text{Ena}(M)$ срабатывает в следующий временной шаг с вероятностью $\Omega_N(t)$, если никакой другой переход не допустим в M .

Вероятность срабатывания в маркировке M множества переходов $U \subseteq \text{Ena}(M)$ такого, что $\bullet U \subseteq M$, есть

$$PF(U, M) = \prod_{t \in U} \Omega_N(t) \cdot \prod_{t \in \text{Ena}(M) \setminus U} (1 - \Omega_N(t)).$$

Таким образом, семантика функционирования ДВССП — шаговая, т. е. переходы могут срабатывать параллельно в каждый момент дискретного времени.

3.2. Методы анализа

Множество достижимых маркировок ДВССП совпадает с соответствующим множеством базовой СП, задающей структуру ДВССП. Поэтому качественные свойства ДВССП можно изучать через анализ графа достижимости соответствующих СП.

Количественные свойства изучаются с помощью ДВМЦ, соответствующей *ограниченной живой* ДВССП.

ДВМЦ $DTMC(N)$, соответствующая ДВССП N , строится следующим образом.

1. Множество состояний $S = RS(N)$.
2. Вероятность перехода ρ_{ij} ($1 \leq i, j \leq n = |S|$) из состояния M_i в M_j есть

$$\rho_{ij} = \frac{\sum_{\{U \subseteq \text{Ena}(M_i) | M_i \xrightarrow{U} M_j\}} PF(U, M_i)}{\sum_{\{U \subseteq \text{Ena}(M_i) | \bullet U \subseteq M_i\}} PF(U, M_i)}.$$

Для $DTMC(N)$ строится (одношаговая) МВП \mathbf{P} с элементами ρ_{ij} .

Преходящая (k -шаговая) ФМВ для ДВМЦ $DTMC(N)$ находится из системы уравнений

$$\psi(k) = \psi(0)\mathbf{P}^k,$$

где $k \in \mathbb{N}$ и $\psi(0) = (\psi_1(0), \dots, \psi_n(0))$ — вероятность начального распределения, компоненты которой $\psi_i(0)$ ($1 \leq i \leq n$) определяются как

$$\psi_i(0) = \begin{cases} 1, & M_i = M_N; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В этом случае $\psi(k) = (\psi_1(k), \dots, \psi_n(k))$ — преходящая ФМВ над достижимыми за k шагов (смен состояний) маркировками и $\psi_i(k)$ ($1 \leq i \leq n$) — вероятности маркировок M_i в преходящем состоянии.

Стабильная ФМВ для ДВМЦ $DTMC(N)$ является решением системы уравнений неподвижной точки

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{P} - \mathbf{E}) = 0, \\ \psi \mathbf{e}^T = 1. \end{cases}$$

В этом случае $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ — стабильная ФМВ над достижимыми маркировками и ψ_i ($1 \leq i \leq n$) — вероятности маркировок M_i в стабильном состоянии.

3.3. Примеры

ДВССП N , изображенная на рис. 6, моделирует работу ресторана, в котором готовится обед из двух блюд. Сначала заказывается обед. После того, как *оба* блюда готовы, они подаются на стол. Процессы приготовления блюд полностью *независимы*, т. е. готовить можно одно блюдо за другим или оба одновременно. Время приготовления блюд примерно *одинаково*.

В этом и следующих примерах мы не указываем имена мест и переходов ССП на рисунках, чтобы сделать изображения менее громоздкими. Эти имена легко извлечь из контекста. Кроме того, места и переходы нумеруются слева направо и сверху вниз.

ДВСП N имеет множество мест $P_N = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ и переходов $T_N = \{t_1, t_2, t_3\}$. Функция условных вероятностей переходов определяется так: $\Omega_N(t_1) = \Omega_N(t_2) = \rho$, $\Omega_N(t_3) = \sigma$.

Места интерпретируются следующим образом: p_1 — заказ первого блюда (Ordered1), p_2 — заказ второго блюда (Ordered2), p_3 — готово первое блюдо (Cooked1), p_4 — готово второе блюдо (Cooked2).

$RS(N)$ состоит из четырех маркировок, представляющих возможные состояния системы (в векторной форме): $M_1 = (1, 1, 0, 0)$ — заказ сделан (Ordered), $M_2 = (0, 1, 1, 0)$ — готово первое блюдо (Cooked1), $M_3 = (1, 0, 0, 1)$ — готово второе блюдо (Cooked2), $M_4 = (0, 0, 1, 1)$ — оба блюда готовы (Cooked).

Переходы и их условные вероятности имеют следующую интерпретацию.

1. Когда заказ сделан, готовится первое блюдо (переход t_1 с условной вероятностью ρ).
2. Когда заказ сделан, готовится второе блюдо (переход t_2 с условной вероятностью ρ).

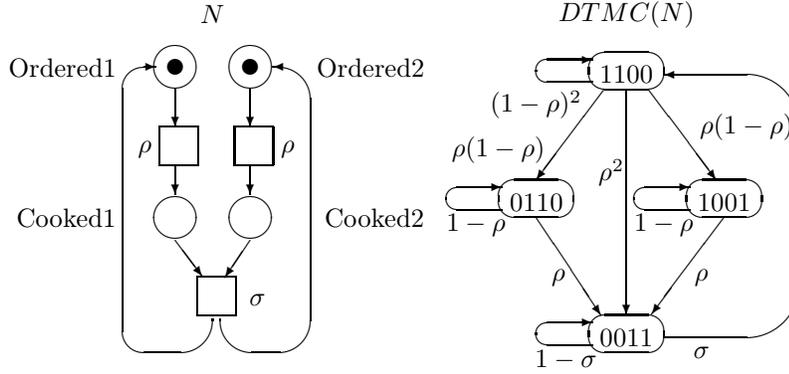


Рис. 6. ДВССП ресторана и ее ДВМЦ.

3. Когда оба блюда готовы, они подаются на стол (переход t_3 с условной вероятностью σ).

Одношаговая МВП для ДВМЦ $DTMC(N)$, также изображенной на рис. 6, такова:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (1-\rho)^2 & \rho(1-\rho) & \rho(1-\rho) & \rho^2 \\ 0 & 1-\rho & 0 & \rho \\ 0 & 0 & 1-\rho & \rho \\ \sigma & 0 & 0 & 1-\sigma \end{bmatrix}.$$

Стабильная ФМВ для ДВМЦ $DTMC(N)$ является решением следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \rho(2-\rho)\psi_1 = \sigma\psi_4, \\ \rho(1-\rho)\psi_1 = \rho\psi_2, \\ \rho(1-\rho)\psi_1 = \rho\psi_3, \\ \rho^2\psi_1 + \rho\psi_2 + \rho\psi_3 = \sigma\psi_4, \\ \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = 1. \end{cases}$$

В результате получаем

$$\psi = \frac{1}{\sigma(3-2\rho) + \rho(2-\rho)}(\sigma, \sigma(1-\rho), \sigma(1-\rho), \rho(2-\rho)).$$

Если условные вероятности переходов совпадают ($\rho = \sigma$), то

$$\psi = \frac{1}{7}(2, 1, 1, 3).$$

В этом случае в стабильном состоянии вероятность заказа в полтора раза меньше вероятности обслуживания.

3.4. Выводы

Определенные выше ДВССП — непомеченные. Такую модель естественно использовать в случае моделирования переходами логически разных активностей. Например, переходу t_1 ДВССП из приведенного примера можно сопоставить действие приготовления блюда, а переходу t_3 — подачу блюд на стол. Однако переходы t_1 и t_2 ДВССП моделируют одно действие приготовления блюда. Поэтому рационально ввести пометку переходов L_N , присваивающую переходам следующие действия: $L_N(t_1) = L_N(t_2) = Cook$, $L_N(t_3) = Serve$. Далее, условные вероятности логично связать с действиями. Тогда в нашем примере условная вероятность $Cook$ будет ρ , а $Serve$ — χ . В общем случае введение пометки переходов ДВССП, как это было сделано в [14], повышает наглядность и интуитивную ясность модели.

Использование ДВССП в нашем примере оправдано, так как в результате появилась возможность моделировать параллельные действия (приготовление блюд) и вычислять вероятности выполнения совокупностей независимых действий. Таково преимущество шаговой семантики ДВССП по сравнению с интерливингом (моделированием параллельного срабатывания недетерминированным выбором всех возможных комбинаций последовательных срабатываний). Шаговая семантика лучше соответствует исходному формализму СП как “истинно параллельной” модели, в которой параллелизм задается естественным образом как причинная независимость. В [7] описаны композиционные ДВССП с произвольными распределениями условных вероятностей переходов. Таким образом, дискретность времени позволяет вводить произвольные задержки при сохранении приемлемой анализируемости модели.

Вместе с тем, анализ ДВССП затруднен необходимостью вычислять вероятности срабатывания каждой возможной комбинации одновременно допустимых в маркировке переходов (в том числе, и вероятность того, что ни один переход не сработает). Поэтому в соответствующей ДВМЦ появляется много вариантов смен состояний, вероятности которых соответствуют комбинациям условных вероятностей переходов ДВССП. МВП становится плотно заполненной. Вид преходящей и стабильной ФМВ, полученных в результате аналитического решения, становится более громоздким, тем более, что для вычисления преходящего решения МВП приходится возводить в степень.

4. СП С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

СП с непрерывным временем (НВССП) [27, 51] были исторически первым и наиболее простым расширением СП стохастическим типом вре-

мени. Переходам НВССП сопоставляются экспоненциально распределенные временные задержки, т. е. время пребывания в маркировке — случайная переменная с экспоненциальной ФРВ. Это позволяет получить эквивалентность графов достижимости такого класса ССП и НВМЦ. НВССП — предельный случай ДВССП при уменьшении до нуля временного шага.

4.1. Описание модели

Определение 4.1. *Непрерывно-временная ССП (НВССП) — пятерка $N = (P_N, T_N, W_N, \Omega_N, M_N)$, где:*

- (P_N, T_N, W_N, M_N) — *непомеченная СП;*
- $\Omega_N : T_N \rightarrow \mathbb{R}_+$ — *функция темпов (скоростей) переходов.*

В графическом представлении ССП темпы указываются возле соответствующих переходов.

Срабатывание перехода в НВССП — атомарная операция, т. е. в определенный момент времени фишки изымаются из входных мест перехода и мгновенно помещаются в выходные. Задержки срабатывания связаны с переходами и являются экспоненциально распределенными случайными переменными. Каждому переходу $t \in T_N$ НВССП N сопоставляется темп $\Omega_N(t)$, являющийся параметром экспоненциального распределения. Когда переход становится допустимым, его таймер устанавливается на значение связанной с ним случайной задержки. Затем таймер уменьшается с постоянной скоростью. Когда таймер достигает нулевого значения, переход срабатывает.

Если в маркировке допустимы несколько конфликтных (делящих фишки) временных переходов, необходимо сделать выбор, какой из них должен сработать. Существуют следующие правила выбора.

- **Предопределение.** Срабатывающий переход выбирается с помощью некоторой метрики (например, приоритета).
- **Соревнование.** Срабатывает переход с наименьшей задержкой.

Стандартно, в НВССП используется концепция соревнования.

Существуют также различные варианты того, как прошлое поведение системы влияет на будущее. Известны следующие механизмы перезапуска или продолжения работы временных переходов.

- **Перезапуск.** При смене маркировки таймеры всех переходов сбрасываются. После этого устанавливаются новые значения таймеров для переходов, допустимых в новой маркировке. Не сохраняется никакой памяти о прошлом.
- **Допускающая память.** При смене маркировки таймеры всех переходов, которые перестали быть допустимыми, сбрасываются, а

тех, которые не перестали быть таковыми, сохраняют свои значения.

Память о прошлом сохраняется в связанной с каждым переходом *переменной допускающей памяти*, которая содержит время пребывания в допустимом состоянии с последнего момента, когда переход стал допустимым.

- **Возрастная память.** При смене маркировки таймеры всех переходов сохраняют свои значения.

Память о прошлом сохраняется в связанной с каждым переходом *переменной возрастной памяти*, которая содержит накопленное время пребывания в допустимом состоянии с последнего момента, когда переход сработал.

Из-за свойства забывчивости экспоненциального распределения для НВССП все эти концепции памяти эквивалентны. Перезапуск — стандартный механизм, удобный для представления проверок гипотез. Допускающий и возрастной типы памяти широко применяются для моделирования работы различных приложений. Например, в случае допускающей памяти с переходами можно связать действия (активности), которые начинаются и прерываются во время функционирования НВССП. Завершение действий влечет смену состояния.

Для удобства анализа будем использовать соревнование с перезапуском в качестве способа функционирования НВССП. Свойство забывчивости для НВССП гарантирует, что время пребывания в маркировке M экспоненциально распределено с параметром $\sum_{u \in E_{na}(M)} \Omega_N(u)$. ФРВ времени пребывания в маркировке M есть ФРВ минимального времени задержки срабатывания переходов из $E_{na}(M)$.

Вероятность срабатывания (первым) в маркировке M перехода $t \in E_{na}(M)$ есть

$$PF(t, M) = \frac{\Omega_N(t)}{\sum_{u \in E_{na}(M)} \Omega_N(u)}.$$

Среднее время пребывания в маркировке M есть

$$SJ(M) = \frac{1}{\sum_{t \in E_{na}(M)} \Omega_N(t)}.$$

Заметим, что связь случайной задержки срабатывания с непрерывно-временной ФРВ влечет нулевую вероятность срабатывания двух переходов одновременно. Таким образом, переходы срабатывают последова-

тельно, один за другим, и семантика НВССП — *интермивинговая* (параллелизм действий моделируется их чередованием).

4.2. Методы анализа

Множество достижимых маркировок НВССП совпадает с соответствующим множеством базовой СП, задающей структуру НВССП. Это следствие факта, что задержки берутся из \mathbb{R}_+ , поэтому в любой достижимой маркировке каждый переход имеет ненулевую вероятность срабатывания. Следовательно, структурные и функциональные свойства СП сохраняются в построенной на ее основе НВССП. Поэтому такие качественные (функциональные) свойства, как возникновение тупиков или безопасность, можно изучать через анализ графа достижимости.

Количественные (временные) свойства изучаются с помощью НВМЦ, соответствующей *ограниченной* НВССП.

НВМЦ $CTMC(N)$, соответствующая НВССП N , строится следующим образом.

1. Множество состояний $S = RS(N)$.
2. Темп перехода r_{ij} ($1 \leq i, j \leq n = |S|$) из состояния M_i в M_j есть

$$r_{ij} = \begin{cases} \sum_{\{t \in \text{Ena}(M_i) | M_i \xrightarrow{t} M_j\}} \Omega_N(t), & i \neq j; \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

Для НВМЦ $CTMC(N)$ строится МТП \mathbf{Q} с элементами

$$q_{ij} = \begin{cases} \sum_{\{t \in \text{Ena}(M_i) | M_i \xrightarrow{t} M_j\}} \Omega_N(t), & i \neq j; \\ - \sum_{t \in \text{Ena}(M_i)} \Omega_N(t), & i = j. \end{cases}$$

МТП \mathbf{Q} можно также определить как

$$q_{ij} = \begin{cases} r_{ij}, & i \neq j; \\ - \sum_{\{k | 1 \leq k \leq n, k \neq i\}} r_{ik}, & i = j. \end{cases}$$

Преходящая ФМВ находится из системы уравнений с матричной экспонентой

$$\varphi(\delta) = \varphi(0)e^{\mathbf{Q}\delta},$$

где $\varphi(0) = (\varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0))$ — вероятность начального распределения, компоненты которой $\varphi_i(0)$ ($1 \leq i \leq n$) определяются как

$$\varphi_i(0) = \begin{cases} 1, & M_i = M_N; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В этом случае $\varphi(\delta) = (\varphi_1(\delta), \dots, \varphi_n(\delta))$ — переходящая ФМВ над достижимыми маркировками и $\varphi_i(\delta)$ ($1 \leq i \leq n$) — вероятности маркировок M_i в переходящем состоянии.

Стабильная ФМВ для НВМЦ $CTMC(N)$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} \varphi \mathbf{Q} = 0, \\ \varphi \mathbf{e}^T = 1. \end{cases}$$

В этом случае $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ — стабильная ФМВ над достижимыми маркировками и φ_i ($1 \leq i \leq n$) — вероятности маркировок M_i в стабильном состоянии.

Более подробный анализ НВССП состоит в вычислении индексов производительности, многие из которых можно получить на основе распределения в стабильном состоянии над множеством достижимых маркировок.

- *Вероятность события*, определяемого через маркировки. Пусть событие \mathcal{A} задается условием, истинным для всех маркировок из множества $Mark_{\mathcal{A}} \subseteq RS(N)$. Тогда вероятность \mathcal{A} в стабильном состоянии определяется как

$$P(\mathcal{A}) = \sum_{\{i | M_i \in Mark_{\mathcal{A}}\}} \varphi_i.$$

- *Вероятность наличия k фишек в месте $p \in P_N$* определяется как

$$Tokens(p, k) = \sum_{\{i | M_i(p) = k\}} \varphi_i.$$

- *Среднее число фишек в месте $p \in P_N$* определяется как

$$Tokens(p) = \sum_{\{i | p \in M_i\}} M_i(p) \varphi_i = \sum_{k \geq 1} Tokens(p, k) k.$$

- *Частота срабатывания перехода $t \in T_N$* за единицу времени определяется как

$$Freq(t) = \sum_{\{i | t \in Ena(M_i)\}} \Omega_N(t) \varphi_i.$$

- Пусть $TravNum$ — среднее число фишек, проходящих некоторую подсеть НВССП, а $Rate$ — средний темп входа в подсеть (выхода из подсети). Тогда *средняя задержка фишки*, проходящей подсеть в стабильном состоянии, есть

$$Delay = \frac{TravNum}{Rate}.$$

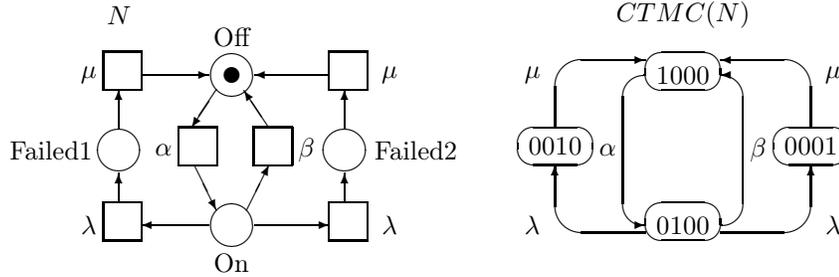


Рис. 7. НВССП гирлянды и ее НВМЦ.

4.3. Примеры

Рассмотрим модификацию примера люстры из [43] посредством добавления второй лампы.

НВССП N , изображенная на рис. 7, моделирует поведение гирлянды с двумя лампочками, т. е. системы с двумя последовательно включенными *одинаковыми* лампами. Гирлянду можно включать и выключать. Когда она включена, одна из лампочек может перегореть (но не обе вместе, так как при выходе из строя одной из лампочек электрическая цепь мгновенно разрывается). Перегоревшая лампочка сразу заменяется после отключения гирлянды.

НВССП N имеет множество мест $P_N = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ и переходов $T_N = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$. Функция темпов переходов определяется так: $\Omega_N(t_1) = \alpha$, $\Omega_N(t_2) = \beta$, $\Omega_N(t_3) = \Omega_N(t_5) = \lambda$, $\Omega_N(t_4) = \Omega_N(t_6) = \mu$.

Места интерпретируются следующим образом: p_1 — гирлянда выключена (Off), p_2 — гирлянда включена (On), p_3 — перегорела первая лампочка (Failed1), p_4 — перегорела вторая лампочка (Failed2).

$RS(N)$ состоит из четырех маркировок, представляющих возможные состояния системы: $M_1 = (1, 0, 0, 0)$, $M_2 = (0, 1, 0, 0)$, $M_3 = (0, 0, 1, 0)$, $M_4 = (0, 0, 0, 1)$. Так как во всех достижимых маркировках лишь одно место содержит фишки, состояния системы можно ассоциировать с местами.

Переходы и их темпы имеют следующую интерпретацию.

1. Когда гирлянда выключена, то по истечении времени, экспоненциально распределенного с параметром α , ее можно включить (переход t_1).
2. Когда гирлянда включена, то после того, как пройдет время, экспоненциально распределенное с параметром β , ее можно выключить (переход t_2) либо за период времени с экспоненциальным пара-

метром λ перегорает первая (переход t_3) или вторая (переход t_5) лампочка.

3. Когда гирлянда перегорает, то по истечении времени с экспоненциальным параметром μ заменяется первая (переход t_4) или вторая (переход t_6) неисправная лампочка.

МТП для НВМЦ $CTMC(N)$, также изображенной на рис. 7, такова:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 & 0 \\ \beta & -(\beta + 2\lambda) & \lambda & \lambda \\ \mu & 0 & -\mu & 0 \\ \mu & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}.$$

Стабильная ФМВ для НВМЦ $CTMC(N)$ является решением следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha\varphi_1 = \beta\varphi_2 + \mu\varphi_3 + \mu\varphi_4, \\ (\beta + 2\lambda)\varphi_2 = \alpha\varphi_1, \\ \mu\varphi_3 = \lambda\varphi_2, \\ \mu\varphi_4 = \lambda\varphi_2, \\ \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 1. \end{cases}$$

В результате получаем

$$\varphi = \frac{1}{\mu(\beta + 2\lambda) + \alpha(\mu + 2\lambda)}(\mu(\beta + 2\lambda), \alpha\mu, \alpha\lambda, \alpha\lambda).$$

Заметим, что первые четыре уравнения можно рассматривать как равенства входных и выходных потоков, связанных с каждым состоянием $CTMC(N)$. Вероятность потока, связанного с каждой дугой соответствующей ДТП, — произведение вероятности перехода в данное состояние в условиях стабильности и темпа перехода, помечающего дугу.

На основе φ можно вычислить следующие индексы производительности.

- Доля времени свечения гирлянды есть φ_2 .
- Доля времени неисправности гирлянды есть $\varphi_3 + \varphi_4 = 2\varphi_3 = 2\varphi_4$.
- Средняя частота срабатывания одного из переходов t_3 или t_5 есть $Freq(t_3, t_5) = Freq(t_3) + Freq(t_5)$, где $Freq(t_3) = \lambda\varphi_2 = Freq(t_5)$. Средняя частота срабатывания одного из переходов t_4 или t_6 есть $Freq(t_4, t_6) = Freq(t_4) + Freq(t_6)$, где

$$Freq(t_4) = \mu\varphi_3 = \mu\varphi_4 = Freq(t_6).$$

Поэтому *среднее время между двумя последовательными выходами из строя (ремонта)* есть

$$\frac{1}{\text{Freq}(t_3, t_5)} = \frac{1}{2\lambda\varphi_2} = \frac{1}{2\mu\varphi_3} = \frac{1}{2\mu\varphi_4} = \frac{1}{\text{Freq}(t_4, t_6)}.$$

- Средняя частота срабатывания перехода t_1 есть $\text{Freq}(t_1) = \alpha\varphi_1$. Средняя частота срабатывания одного из переходов t_2 или t_3 или t_5 есть $\text{Freq}(t_2, t_3, t_5) = \text{Freq}(t_2) + \text{Freq}(t_3) + \text{Freq}(t_5)$, где

$$\text{Freq}(t_2) = \beta\varphi_2, \quad \text{Freq}(t_3) = \lambda\varphi_2 = \text{Freq}(t_5).$$

Поэтому *среднее время между двумя последовательными включениями (выключениями) гирлянды* есть

$$\frac{1}{\text{Freq}(t_1)} = \frac{1}{\alpha\varphi_1} = \frac{1}{(\beta + 2\lambda)\varphi_2} = \frac{1}{\text{Freq}(t_2, t_3, t_5)}.$$

В общем случае, для гирлянды с n лампочками стабильная ФМВ будет следующей:

$$\varphi = \frac{1}{\mu(\beta + n\lambda) + \alpha(\mu + n\lambda)}(\mu(\beta + n\lambda), \alpha\mu, \underbrace{\alpha\lambda, \dots, \alpha\lambda}_n).$$

4.4. Выводы

Определенные выше непомеченные НВССП естественно использовать, когда все активности, реализуемые переходами, разные. В этом случае активности можно просто идентифицировать с именами переходов. Например, в рассмотренной НВССП переход t_1 соответствует включению гирлянды, а t_2 — ее выключению, т. е. совершенно разным действиям. Однако переходам t_3 и t_5 можно присвоить одно и то же действие перегорания лампы, а переходам t_4 и t_6 — ее замены. Тогда разным переходам будут сопоставлены одинаковые действия. Для нашего примера можно ввести функцию пометки L_N , присваивающую переходам следующие действия: $L_N(t_1) = \text{TurnOn}$, $L_N(t_2) = \text{TurnOff}$, $L_N(t_3) = L_N(t_5) = \text{LampFailure}$, $L_N(t_4) = L_N(t_6) = \text{LampChange}$. Также логично связать темпы не с переходами, а с действиями. Тогда в нашем примере темп TurnOn будет равен α , темп TurnOff — β , LampFailure — λ , а LampChange — μ .

Поэтому, если ввести пометку в определение НВССП, как в [15], представление динамических систем станет более наглядным. В случае использования допускающей памяти, семантика таких помеченных НВССП

соответствовала бы общим представлениям о природе действий. Наконец, появится возможность определения эквивалентностей на основе качественных функциональных особенностей помеченных СП, дополненных проверкой временных свойств, присущих НВССП, определяемым на основе этих СП. Поэтому помеченные НВССП, по нашему мнению, более удобны.

В принципе, анализ НВССП довольно сложен, и это ограничивает область их применения. Сложность возникает, например, из-за необходимости учитывать все достижимые маркировки, число которых может быть очень большим даже для малых по размерам НВССП. При моделировании реальных систем, имеющих практическое значение, получаются большие НВССП с множеством маркировок. Кроме того, в одной модели присутствуют “быстрые” и “медленные” действия, различия между которыми явно не описываются. Причем медленные действия могут быть особенно важны для оценки общей производительности. Это приводит к системам уравнений, трудно разрешимым при помощи стандартных численных методов, и может сделать модель логически некорректной. Кроме того, при разработке модели могут понадобиться переходы, не имеющие задержек, которые соответствуют логическим аспектам поведения системы.

По сравнению с ДВССП, НВССП более удобно анализировать, но дискретность времени в ДВССП лучше соответствует характеру функционирования СП и моделируемых ими вычислительных процессов. При бесконечном уменьшении длины временного шага ДВССП могут приближаться НВССП. Кроме того, экспоненциальные задержки не всегда точно соответствуют поведению реальных систем. В литературе было показано, что в модели на основе дискретного времени легче ввести произвольно распределенные задержки переходов.

5. ОБОБЩЕННЫЕ ССП

Обобщенные ССП (ОССП) [46, 48] — расширение НВССП, призванное решить ряд проблем, присущих последним. В ОССП есть переходы как с экспоненциально распределенной (*экспоненциальные* переходы), так и с нулевой (*мгновенные* переходы) задержками. Мгновенные переходы имеют веса, определяющие вероятности срабатывания в случае конфликта с другим переходом данного типа, а также ненулевые приоритеты. Кроме того, все мгновенные переходы приоритетны по сравнению с экспоненциальными, которые по определению имеют нулевой приоритет. Места с переходами (не наоборот) могут соединять ингибиторные дуги,

используемые для спецификации негативных условий срабатывания переходов.

5.1. Описание модели

Определение 5.1. *Обобщенная ССП (ОССП) – семерка*

$$N = (P_N, T_N, W_N, H_N, \Omega_N, \aleph_N, M_N),$$

где

- $(P_N, T_N, W_N, H_N, \aleph_N, M_N)$ – *непомеченная ИПСП такая, что T_N состоит из экспоненциальных и мгновенных переходов, а \aleph_N имеет значение 0 (низший приоритет) на всех экспоненциальных и значение 1 (в некоторых определениях ≥ 1) на мгновенных переходах;*
- $\Omega_N : T_N \rightarrow \mathbb{R}_+$ – *функция темпов экспоненциальных и весов мгновенных переходов.*

В графическом представлении ОССП мгновенные переходы изображаются утолщенными квадратами, поэтому приоритеты можно не указывать (если приоритеты мгновенных переходов равны 1). Веса указываются возле соответствующих мгновенных переходов.

Пусть M – маркировка ОССП N . Маркировка M *действительная*, если $Epa(M)$ содержит только экспоненциальные переходы. Маркировка M *исчезающая*, если $Epa(M)$ содержит хотя бы один мгновенный переход.

Пусть $RS_T(N)$ – множество *действительных маркировок*, а $RS_V(N)$ – множество *исчезающих маркировок* НВССП N . Очевидно,

$$RS(N) = RS_T(N) \cup RS_V(N), \quad RS_T(N) \cap RS_V(N) = \emptyset.$$

Функционирование ОССП похоже на описанное для НВССП, но с учетом мгновенных переходов. Выбор следующего перехода для срабатывания зависит от параметров, связанных с ним и не являющихся функциями времени.

Вероятность срабатывания (первым) в маркировке M (экспоненциального или мгновенного) перехода $t \in T_N$ ОССП N есть

$$PF(t, M) = \frac{\Omega_N(t)}{\sum_{u \in Epa(M)} \Omega_N(u)}.$$

В действительной маркировке (t – экспоненциальный) $\Omega_N(t)$ – темп, а в исчезающей (t – мгновенный) – вес перехода t .

Среднее время пребывания в маркировке M есть

$$SJ(M) = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{t \in \text{Ena}(M)} \Omega_N(t)}, & M \in RS_T(N); \\ 0, & M \in RS_V(N). \end{cases}$$

Переходы срабатывают один за другим, даже если в исчезающей маркировке допустимы несколько не конфликтующих друг с другом мгновенных переходов. Заметим, что такое поведение эквивалентно функционированию с разрешением одновременного срабатывания нескольких мгновенных переходов. Итак, семантика функционирования ОССП — *интерливинговая*, как и у НВССП.

5.2. Методы анализа

Введение ингибиторных дуг и приоритетов в стандартные СП сокращает их множество достижимости. Множество достижимых маркировок ОССП совпадает с соответствующим множеством СП с ингибиторными дугами и приоритетами, стохастическим расширением которых является ОССП. Поэтому качественные свойства ОССП можно изучать через анализ графа достижимости соответствующей СП с ингибиторными дугами и приоритетами.

Количественный анализ заключается в исследовании стохастического процесса, связанного с *ограниченной возвратной* ОССП. Этот процесс является конечной однородной неразложимой ПМЦ [9]. ПМЦ можно анализировать с помощью ВДВМЦ, описывающей смены состояний процесса. На основе ОССП, посредством игнорирования концепции времени, можно определить ВДВМЦ, описывающую смены состояний ПМЦ.

Встроенная ДВМЦ (ВДВМЦ) $EDTMC(N)$, соответствующая ОССП N , определяется следующим образом.

1. Множество состояний $S = RS(N)$.
2. Вероятность перехода ρ_{ij} ($1 \leq i, j \leq n = |S|$) из состояния M_i в M_j есть

$$\rho_{ij} = \frac{\sum_{\{t \in \text{Ena}(M_i) | M_i \xrightarrow{t} M_j\}} \Omega_N(t)}{\sum_{t \in \text{Ena}(M_i)} \Omega_N(t)}.$$

Для ВДВМЦ $EDTMC(N)$ строится (одношаговая) МВП \mathbf{P} с элементами ρ_{ij} .

Преходящая (k -шаговая) ФМВ для ВДВМЦ $EDTMC(N)$ находится из системы уравнений

$$\psi(k) = \psi(0)\mathbf{P}^k,$$

где $k \in \mathbb{N}$ и $\psi(0) = (\psi_1(0), \dots, \psi_n(0))$ — вероятность начального распределения, компоненты которой $\psi_i(0)$ ($1 \leq i \leq n$) определяются как

$$\psi_i(0) = \begin{cases} 1, & M_i = M_N; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В этом случае $\psi(k) = (\psi_1(k), \dots, \psi_n(k))$ — преходящая ФМВ над достижимыми за k шагов (смен состояний) маркировками, и $\psi_i(k)$ ($1 \leq i \leq n$) — вероятности маркировок M_i в преходящем состоянии.

Стабильная ФМВ для ВДВМЦ $EDTMC(N)$ является решением системы уравнений неподвижной точки

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{P} - \mathbf{E}) = 0, \\ \psi \mathbf{e}^T = 1. \end{cases}$$

В этом случае $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ — стабильная ФМВ над достижимыми маркировками и ψ_i ($1 \leq i \leq n$) — вероятности маркировок M_i в стабильном состоянии. Заметим, что значение $\frac{1}{\psi_i}$ ($1 \leq i \leq n$) можно интерпретировать как среднее время возврата в маркировку M_i по числу срабатываний переходов.

Стабильная ФМВ $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ для ПМЦ, соответствующей ОССП N , получается умножением каждого ψ_i ($1 \leq i \leq n$) на среднее время пребывания $SJ(M_i)$ в соответствующей маркировке M_i и последующей нормализацией распределения. При этом, если M — исчезающая маркировка, то $SJ(M) = 0$. В действительных маркировках допустимы только экспоненциальные переходы, поэтому время пребывания определяется так же, как и для НВССП. Таким образом, для $1 \leq i \leq n$ получаем

$$\varphi_i = \begin{cases} \frac{\psi_i SJ(M_i)}{\sum_{j=1}^n \psi_j SJ(M_j)}, & M_i \in RS_T(N); \\ 0, & M_i \in RS_V(N). \end{cases}$$

Описанный метод количественного анализа приемлем только при небольшом числе исчезающих состояний по сравнению с действительными. Он требует вычисления среднего числа посещений каждого исчезающего состояния, что не дает новой информации о решении. Кроме того, исчезающие состояния увеличивают размер МВП, что приводит к усложнению вычислений.

В [9, 43, 48] описан более эффективный метод, в соответствии с которым исчезающие маркировки удаляются из ВДВМЦ. В результате получается сокращенная ВДВМЦ только над действительными маркировками, для построения которой вычисляются полные вероятности переходов между ними. Поэтому количественный анализ ограниченных ОССП может состоять в решении системы линейных уравнений, число которых равно количеству достижимых действительных маркировок. Таким образом, НВМЦ, соответствующую ОССП, можно построить через сокращенную ВДВМЦ, деля строки последней на среднее время пребывания в стартовых действительных маркировках и устанавливая элементы главной диагонали равными отрицательной сумме остальных элементов соответствующей строки.

5.3. Примеры

ОССП N , изображенная на рис. 8, моделирует поведение путешественника, постоянно посещающего новые города. Сначала он осматривает город, а потом едет в следующий на ближайшем поезде или автобусе. Автобусы отъезжают реже, чем поезда, но на автобусах добираться до очередного города быстрее. Считается, что время пребывания в городе, число отправок автобусов или поездов, а также их скорости *не зависят* от конкретного города. Маршрут разработан так, что расстояния между последовательно посещаемыми городами *одинаковы*.

ОССП N имеет множество мест $P_N = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ и переходов $T_N = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$, из которых t_1, t_4, t_5 — экспоненциальные, а t_2, t_3 — мгновенные. Функция темпов / весов переходов определяется так: $\Omega_N(t_1) = \lambda$, $\Omega_N(t_2) = \alpha$, $\Omega_N(t_3) = \beta$, $\Omega_N(t_4) = \mu$, $\Omega_N(t_5) = \nu$.

Места интерпретируются следующим образом: p_1 — быть в очередном городе (InTown), p_2 — отъезжает транспорт в следующий город (Trsp), p_3 — быть в автобусе (InBus), p_4 — быть в поезде (InTrain).

$RS(N)$ состоит из четырех маркировок, представляющих возможные состояния системы: $M_1 = (1, 0, 0, 0)$, $M_2 = (0, 1, 0, 0)$, $M_3 = (0, 0, 1, 0)$, $M_4 = (0, 0, 0, 1)$. Так как во всех достижимых маркировках лишь одно место содержит фишки, состояния системы можно ассоциировать с местами.

Маркировка M_2 — исчезающая, т. е. время пребывания в ней — нулевое, что соответствует входу в отъезжающий транспорт сразу при его появлении. Остальные маркировки — действительные. Таким образом, $RS_T(N) = \{M_1, M_3, M_4\}$ и $RS_V(N) = \{M_2\}$.

Переходы и их темпы / веса имеют следующую интерпретацию.

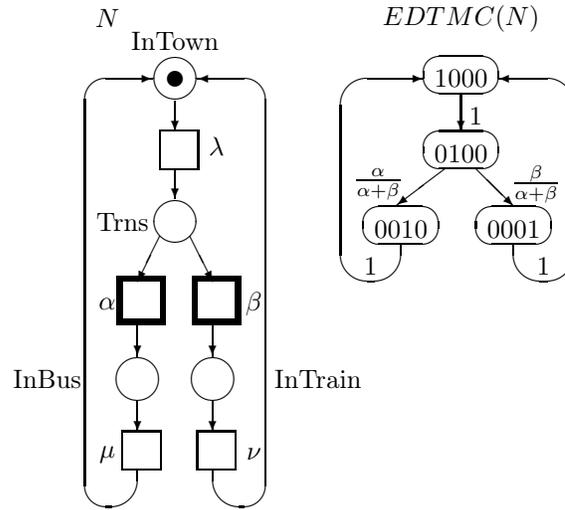


Рис. 8. ОСПП путешественника и ее ВДВМЦ.

1. Когда путешественник приезжает в очередной город, то по истечении времени, экспоненциально распределенного с параметром λ , он осматривает город и дожидается отправления транспорта в следующее место (переход t_1).
2. Отъезжающий транспорт с вероятностью α — автобус (переход t_2), либо с вероятностью β — поезд (переход t_3). Можно также считать, что на α отправлений автобусов приходится β отправлений поездов, т. е. вес перехода интерпретировать как количество отправлений соответствующего вида транспорта.
Предполагается, что $\alpha \leq \beta$, т. е. автобусы отъезжают реже.
3. Когда путешественник садится в автобус, то за время, экспоненциально распределенное с параметром μ , он приезжает в очередной город (переход t_4).
4. Когда путешественник садится в поезд, то за время, экспоненциально распределенное с параметром ν , он приезжает в очередной город (переход t_5).

Предполагается, что $\mu \geq \nu$, т. е. автобусы едут быстрее.

МВП для ВДВМЦ $EDTMC(N)$, также изображенной на рис. 8, такова:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{\alpha + \beta} & \frac{\beta}{\alpha + \beta} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Стабильная ФМВ для ВДВМЦ $EDTMC(N)$ является решением следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \psi_1 = \psi_3 + \psi_4, \\ \psi_1 = \psi_2, \\ \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \psi_2 = \psi_3, \\ \frac{\beta}{\alpha + \beta} \psi_2 = \psi_4, \\ \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = 1. \end{cases}$$

В результате получаем

$$\psi = \frac{1}{3} \left(1, 1, \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right).$$

Вектор среднего времени пребывания в маркировках таков:

$$SJ = \left(\frac{1}{\lambda}, 0, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu} \right).$$

Взвешенная по SJ стабильная ФМВ ψ есть:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{\lambda}, 0, \frac{\alpha}{\mu(\alpha + \beta)}, \frac{\beta}{\nu(\alpha + \beta)} \right).$$

Остается нормализовать взвешенную стабильную ФМВ, разделив ее на сумму собственных компонентов

$$\psi SJ^T = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\alpha\nu + \beta\mu}{\mu\nu(\alpha + \beta)} \right).$$

Таким образом, стабильная ФМВ для ПМЦ, соответствующей ОССП N , выглядит так:

$$\varphi = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \frac{\alpha\nu + \beta\mu}{\mu\nu(\alpha + \beta)}} \left(\frac{1}{\lambda}, 0, \frac{\alpha}{\mu(\alpha + \beta)}, \frac{\beta}{\nu(\alpha + \beta)} \right).$$

Если автобусы и поезда отправляются одинаково часто ($\alpha = \beta$) и едут с равной скоростью ($\mu = \nu$), то

$$\varphi = \frac{1}{2(\lambda + \mu)}(2\mu, 0, \lambda, \lambda).$$

В этом случае в стабильном состоянии вероятность пребывания в маркировке M_1 (нахождение в городе) относительно пребывания в M_3 или M_4 (поездка на транспорте) есть $\frac{\mu}{\lambda}$. Поэтому отношение среднего времени, проведенного в транспорте, к среднему времени пребывания в городе есть $\frac{\lambda}{\mu}$.

5.4. Выводы

Определенные выше непомеченные ОССП естественно использовать, когда все переходы соответствуют логически разным возможностям выбора и активностям. Однако, если в примере путешественника рассматривать только один вид транспорта (например, автобусы двух разных компаний с одинаковыми скоростями движения), переходам t_4 и t_5 можно присвоить действие поездки на автобусе. Кроме того, переходам t_2 и t_3 естественно сопоставить невидимое действие τ , соответствующее приходу автобуса одной из двух компаний, т. е. некоторой внутренней активности транспортной системы. Переходу t_1 можно присвоить действие осмотра города до отправления транспорта. Поэтому удобно ввести пометку переходов L_N для рассмотренной ОССП, присваивающую переходам следующие действия: $L_N(t_1) = SeeTown$, $L_N(t_2) = L_N(t_3) = \tau$, $L_N(t_4) = L_N(t_5) = BusTravel$. Далее, веса логично оставить связанными с переходами, а темпы присвоить действиям. Тогда в нашем примере темп $SeeTown$ будет равен λ , а $BusTravel$ — μ . В целом введение пометки переходов ОССП, аналогичной определенной в [16], увеличивает наглядность и удобство модели.

Использование ОССП в нашем примере оправдано, так как за счет использования мгновенных переходов вероятности отправления разных видов транспорта были отделены от их скоростей движения, которые могут находиться в обратном количественном соотношении друг с другом. В случае использования НВССП пришлось бы смешивать эти два логически разных понятия. Формализм ОССП позволяет разделить вероятности выбора одного из альтернативных путей продолжения вычислений (за счет мгновенных переходов с весами) и временные аспекты этих вычислений (посредством экспоненциальных переходов с темпами). Поэтому ОССП — более естественная модель, чем НВССП.

Исчезающие маркировки можно исключить из рассмотрения, так как время пребывания в них — нулевое. В нашем примере можно было бы игнорировать мгновенную маркировку M_2 и анализировать стабильное поведение на основе сокращенной ВДВМЦ, перенаправив начала дуг, ведущих из M_2 , в состояние M_1 и исключив дугу между M_1 и M_2 . Использование мгновенных переходов позволяет сократить множество достижимости и уменьшить проблему большого числа состояний. Кроме того, это дает возможность избежать трудностей, связанных с большим отличием темпов переходов. При этом введение мгновенных переходов не приводит к существенному усложнению анализа ОССП по сравнению с НВССП. Таким образом, ОССП более удобны для моделирования. Однако, хотя мгновенные переходы увеличивают моделирующую способность ОССП, они не являются значительным расширением типа распределения временных задержек.

Хотя моделирование с помощью ОССП и НВССП было продуктивным во многих областях применения, эти формализмы не получили широкого распространения как средства разработки реальных систем. Причина состоит в высокой графической и вычислительной сложности моделей практически интересных вычислительных систем на основе этих типов ССП.

6. ССП С ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ

ССП с детерминированным временем (ДССП) [47, 49] — расширение ОССП, в котором переходы могут иметь экспоненциально распределенные (*экспоненциальные* переходы) или постоянные (*детерминированные* переходы) задержки. Нулевые задержки мгновенных переходов ОССП — частный случай постоянных. Поэтому мгновенные переходы являются детерминированными. ДССП — более существенное, по сравнению с ОССП, расширение НВССП, наделяющее их возможностями ВСП и пополняющее допустимые типы распределения задержек переходов. ДВССП объединяют преимущества ССП, имеющих приближенные задержки переходов и анализируемых с помощью МЦ, с достоинствами ВСП, обладающими точными задержками срабатывания и исследуемых с помощью алгебраических техник. ДССП можно анализировать с помощью полумарковского процесса, если потребовать, чтобы в каждой маркировке было допустимо не более одного детерминированного перехода.

6.1. Описание модели

Определение 6.1. ССП с детерминированным временем (ДССП) — семерка

$N = (P_N, T_N, W_N, H_N, \Omega_N, \aleph_N, M_N)$, где:

- $(P_N, T_N, W_N, H_N, \aleph_N, M_N)$ — непомяченная ИПСП такая, что T_N состоит из экспоненциальных и детерминированных переходов, а \aleph_N имеет значение 0 (низший приоритет) на всех экспоненциальных и значение 1 (в некоторых определениях ≥ 1) на мгновенных переходах (т. е. детерминированных переходах с нулевой задержкой);
- $\Omega_N : T_N \rightarrow \mathbb{R}_+$ — функция темпов экспоненциальных и задержек детерминированных переходов (в некоторых определениях полагают, что эта функция присваивает веса мгновенным переходам).

В графическом представлении ДССП детерминированные переходы изображаются утолщенными квадратами. Задержки указываются возле соответствующих детерминированных переходов.

В функционировании ДССП используется концепция соревнования с допускающей памятью. В соответствии с ней, для всех допустимых переходов при смене маркировки устанавливается задержка срабатывания. Минимальная из этих задержек определяет, какой переход срабатывает, а также время пребывания в маркировке. Переходам сопоставляются распределения оставшегося до срабатывания времени, с тех пор как они в последний раз стали допустимыми. Локальный выбор между конфликтными действиями может моделироваться в ДССП с помощью весов мгновенных переходов, которые используются для построения “случайных переключателей”, как в ОССП.

Таким образом, семантика функционирования ДССП — *интерливинговая*, как у НВССП и ОССП.

6.2. Методы анализа

Переходы ДССП можно разделить на три класса.

1. Переход *исключительный*, если для всех достижимых маркировок, допускающих его, он — единственный допустимый переход.
2. Переход *связательный*, если он — не исключительный, и для всех достижимых маркировок, допускающих его, все допустимые переходы находятся с ним в конфликте, т. е. не могут сработать вместе с ним.
3. Переход *параллельный*, если он — не исключительный и в некото-

рой достижимой маркировке, допускающей его, некоторый допустимый переход не находится с ним в конфликте.

Будем рассматривать только ДССП, в каждой достижимой маркировке которых допустимо *не более одного параллельного детерминированного перехода*. Это условие гарантирует, что структура графа достижимости ДССП не будет зависеть от временных ограничений. Кроме того, в этом случае ДССП возможно сопоставить полумарковский процесс.

Параллельные детерминированные переходы являются *независимыми*, если они не могут перестать быть допустимыми из-за срабатывания других переходов, и *внеочередными* в противном случае.

Рассмотрим возможные варианты поведения ДССП.

1. В маркировке M_i ($1 \leq i \leq n$) ДССП N не допустим *ни один детерминированный* переход или допустим *исключительный детерминированный* переход. В первом случае среднее время пребывания в M_i есть

$$SJ(M_i) = \frac{1}{\sum_{t \in E_{na}(M_i)} \Omega_N(t)}.$$

Если $\exists t \in T_N$ $M_i \xrightarrow{t} M_j$, вероятность перехода из состояния M_i в M_j есть

$$\rho_{ij} = \frac{\sum_{\{t \in E_{na}(M_i) | M_i \xrightarrow{t} M_j\}} \Omega_N(t)}{\sum_{t \in E_{na}(M_i)} \Omega_N(t)}.$$

2. В маркировке M_i ДССП N допустим *независимый детерминированный* переход $t_d \in T_N$ *вместе с экспоненциальными*. Тогда следующее состояние ВДВМЦ определяется в момент срабатывания t_d . Таким образом, процесс изменения состояний ВДВМЦ не учитывает изменения маркировок в результате срабатывания экспоненциальных переходов в течение времени $\Omega_N(t_d) = \theta_d$, когда t_d был допустим. Вместо того, эти смены состояний “откладываются” до момента срабатывания t_d . Вероятность смены состояний вычисляется с помощью уравнения Чепмена—Колмогорова.
3. В маркировке M_i ДССП N допустим *состязательный* или *внеочередной детерминированный* переход $t_d \in T_N$. Тогда следующее состояние ВДВМЦ определяется либо в момент срабатывания t_d , либо в момент, когда t_d перестает быть допустимым. Вероятность

срабатывания t_d находится с помощью изучения преходящего развития стохастического процесса в течение времени допустимости этого перехода θ_d .

Техника решения, описываемая далее, учитывает только один детерминированный переход. Если в ДССП имеется несколько таких переходов, шаги анализа надо повторить для всех из них.

Множество достижимых маркировок $RS(N)$ ДССП N разобьем на два класса: $MD(N)$, в которых допустим t_d , и $ME(N)$, в которых t_d не допустим. Состояния ВДВМЦ для ДССП N упорядочим так, что маркировки из $MD(N)$ будут идти первыми.

Определим МТП для НВМЦ как

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{K} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix}.$$

Подматрица \mathbf{D} состоит из темпов экспоненциальных переходов, срабатывающих не в конфликте с t_d (темпы переходов между маркировками $MD(N)$). Подматрица \mathbf{K} состоит из темпов экспоненциальных переходов, срабатывающих в конфликте с t_d (темпы переходов, ведущих из $MD(N)$ в $ME(N)$). Подматрицы \mathbf{Q}_{21} и \mathbf{Q}_{22} состоят из темпов экспоненциальных переходов, допустимых в маркировках из $MD(N)$.

Определим сокращенную МТП для НВМЦ, содержащую только темпы экспоненциальных переходов, допустимых в тех же маркировках, что и детерминированный:

$$\mathbf{Q}' = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{K} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть t_d — внеочередной детерминированный переход и $M_i \in MD(N)$, $M_j \in ME(N)$.

Вероятность перехода ВДВМЦ из M_i в M_j при условии, что t_d — внеочередной, есть

$$\mathbf{u}_i e^{\mathbf{Q}' \theta_d} \mathbf{u}_j^T,$$

где \mathbf{u}_i ($1 \leq i \leq n$) — вектор длины n , элемент i которого равен 1, а все остальные равны 0.

Вероятность перехода ВДВМЦ из M_i в M_j при условии, что t_d срабатывает, есть

$$\mathbf{u}_i e^{\mathbf{Q}' \theta_d} \Delta_d \mathbf{u}_j^T,$$

где Δ_d — МВП в результате срабатывания t_d , определяемая как

$$\Delta_d = \begin{bmatrix} \Delta_{DD} & \Delta_{DE} \\ 0 & \mathbf{E} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, i -я (соответствующая M_i) строка МВП для ВДВМЦ есть

$$\mathbf{P}(i) = \mathbf{u}_i e^{\mathbf{Q}'\theta_d} \Delta_d.$$

Среднее время пребывания в маркировке M_i есть

$$SJ(M_i) = \int_0^{\theta_d} \mathbf{u}_i e^{\mathbf{Q}'x} \begin{bmatrix} \mathbf{1}^T \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix} dx,$$

где $\mathbf{1}$ — вектор длины $|MD(N)|$, состоящий из единиц и $\mathbf{0}$ — вектор длины $|ME(N)|$, состоящий из нулей.

Если t_d — независимый, то $SJ(M_i) = \theta_d$. Если t_d — внеочередной, то

$$SJ(M_i) = \sum_{\{j|M_j \in MD(N)\}} \mathbf{u}_i \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{-1}(e^{\mathbf{D}\theta_d} - \mathbf{E}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_j^T.$$

Стабильная ФМВ для ДССП получается из стабильной ФМВ для ВДВМЦ следующим образом. Сначала производится взвешивание стабильных вероятностей маркировок средним временем пребывания в них. Затем осуществляется преобразование вероятностей маркировок, допускающих параллельные детерминированные переходы, с помощью *матрицы преобразования* \mathbf{C}_d , которая соответствует разнице между средним временем пребывания в маркировке ДССП и в состоянии ВДВМЦ.

Элементы (i, j) матрицы преобразования \mathbf{C}_d такие, что $M_i, M_j \in MD(N)$, определяются как

$$\mathbf{C}_d(i, j) = \frac{1}{SJ(M_i)} \mathbf{u}_i \int_0^{\theta_d} e^{\mathbf{Q}'x} dx \mathbf{u}_j^T = \frac{1}{SJ(M_i)} \mathbf{u}_i \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{-1}(e^{\mathbf{D}\theta_d} - \mathbf{E}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_j^T.$$

6.3. Примеры

Рассмотрим модификацию примера очереди типа M/D/1/2/2 из [47] посредством добавления третьего посетителя. ДССП N , изображенная на рис. 9, моделирует поведение очереди из трех посетителей типа M/D/1/3/3. Тип очереди определяется следующим образом: вид процесса прибытия / распределение времени обслуживания / число серверов на станции обслуживания / число посетителей / число запросов. Символ 'M' соответствует марковскому процессу, а 'D' — детерминированному распределению. Так, очередь M/D/1/3/3 имеет марковский процесс прибытия и детерминированное распределение времени обслуживания на

одном сервере трех посетителей с тремя запросами (по одному на каждого посетителя). Посетители думают, потом запрашивают обслуживание и обслуживаются по одному на сервисной станции, если она свободна.

ДССП N имеет множество мест $P_N = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ и переходов $T_N = \{t_1, t_2, t_3\}$, из которых t_2, t_3 — детерминированные (t_2 — мгновенный, т. е. детерминированный с нулевой задержкой), а t_1 — экспоненциальный. Функция темпов / задержек переходов определяется так: $\Omega_N(t_1) = m_1\lambda$, $\Omega_N(t_2) = 0$, $\Omega_N(t_3) = \theta$, где m_1 — количество фишек в месте p_1 , так что t_1 имеет темп, зависящий от входного потока. Переходы удобно обозначить с соответствием с их типами. Экспоненциальный t_1 обозначим через e , мгновенный t_2 — посредством i , детерминированный t_3 — как d .

Места интерпретируются следующим образом: p_1 — количество думающих посетителей (ThinkNo), p_2 — количество посетителей, заказавших обслуживание (RequestNo), p_3 — посетитель на сервисной станции (Service), p_4 — сервисная станция свободна (Free).

$RS(N)$ состоит из шести маркировок, представляющих возможные состояния системы: $M_1 = (3, 0, 0, 1)$ — обдумывание обслуживания тремя посетителями при свободной сервисной станции (3T+F), $M_2 = (2, 1, 0, 1)$ — обдумывание обслуживания двумя посетителями и заказ обслуживания одним при свободной сервисной станции (2T+R+F), $M_3 = (2, 0, 1, 0)$ — обдумывание обслуживания двумя посетителями и обслуживание одного (2T+S), $M_4 = (1, 1, 1, 0)$ — обдумывание обслуживания одним посетителем, заказ обслуживания одним и обслуживание одного (T+R+S), $M_5 = (0, 2, 1, 0)$ — заказ обслуживания двумя посетителями и обслуживание одного (2R+S), $M_6 = (1, 2, 0, 1)$ — обдумывание обслуживания одним посетителем и заказ обслуживания двумя при свободной сервисной станции (T+2R+F).

Маркировки M_2 и M_6 — исчезающие, т. е. время пребывания в них — нулевое, что соответствует началу обслуживания сразу после запроса при свободной сервисной станции. Остальные маркировки — действительные. Таким образом, $RS_T(N) = \{M_1, M_3, M_4, M_5\}$ и $RS_V(N) = \{M_2, M_6\}$. Исчезающие маркировки можно исключить из рассмотрения и анализировать поведение системы, используя не полный, а сокращенный граф достижимости. Полный $RG(N)$ и сокращенный $RG^*(N)$ графы достижимости ДССП N также изображены на рис. 9.

Переходы и их темпы / задержки имеют следующую интерпретацию.

1. Когда посетитель обдумал предложение об обслуживании, то по истечении времени, экспоненциально распределенного с параметром $m_1\lambda$, он заказывает обслуживание (переход t_1).

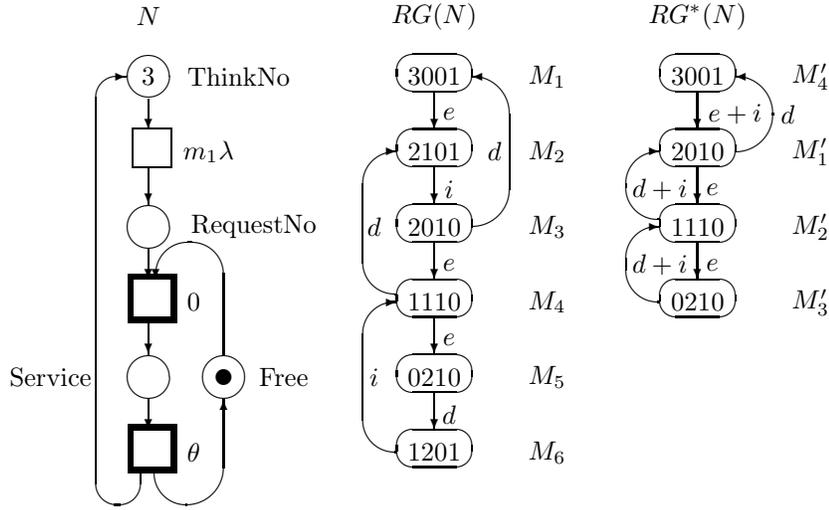


Рис. 9. ДССП очереди и ее полный и сокращенный графы достижимости.

2. Когда обслуживание заказано и сервисная станция пуста, обслуживание на станции начинается мгновенно, т. е. с задержкой 0 (переход t_2).
3. Когда посетитель находится на сервисной станции, то за время θ он будет обслужен (переход t_3).

Ограничение, необходимое для применимости описанной техники анализа, выполнено, так как единственный детерминированный переход t_3 может быть допустим только однократно (не может быть параллелен с самим собой) в каждой достижимой маркировке. Заметим, что t_3 — *параллельный независимый* переход.

Состояния сокращенного графа достижимости $RG^*(N)$ — действительные маркировки $M_1 \in ME(N)$ и $M_3, M_4, M_5 \in MD(N)$. Поэтому для дальнейшего анализа их надо перенумеровать следующим образом: $M_3 \mapsto M'_1$, $M_4 \mapsto M'_2$, $M_5 \mapsto M'_3$, $M_1 \mapsto M'_4$.

Полная и сокращенная МТП для НВМЦ, а также МВП в результате срабатывания детерминированного перехода таковы:

$$Q = \begin{bmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\lambda & 0 & 0 & -3\lambda \end{bmatrix}, \quad Q' = \begin{bmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

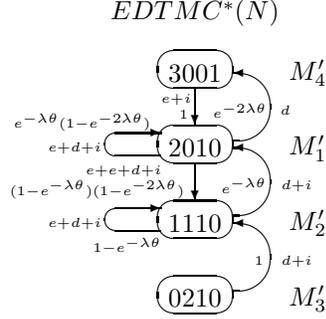


Рис. 10. ВДВМЦ для ДССП очереди.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матричная экспонента такова:

$$e^{\mathbf{Q}'\theta} = \begin{bmatrix} e^{-2\lambda\theta} & e^{-\lambda\theta}(1-e^{-2\lambda\theta}) & (1-e^{-\lambda\theta})(1-e^{-2\lambda\theta}) & 0 \\ 0 & e^{-\lambda\theta} & 1-e^{-\lambda\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Измененная посредством вероятностей срабатывания детерминированного перехода матричная экспонента такова:

$$e^{\mathbf{Q}'\theta}\Delta = \begin{bmatrix} e^{-\lambda\theta}(1-e^{-2\lambda\theta}) & (1-e^{-\lambda\theta})(1-e^{-2\lambda\theta}) & 0 & e^{-2\lambda\theta} \\ e^{-\lambda\theta} & 1-e^{-\lambda\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

МВП для ВДВМЦ $EDTMC^*(N)$, построенной на основе $RG^*(N)$ и изображенной на рис. 10, такова:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} e^{-\lambda\theta}(1-e^{-2\lambda\theta}) & (1-e^{-\lambda\theta})(1-e^{-2\lambda\theta}) & 0 & e^{-2\lambda\theta} \\ e^{-\lambda\theta} & 1-e^{-\lambda\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что $e^{\mathbf{Q}'\theta}\Delta$ отличается от \mathbf{P} тем, что единица с позиции (4, 4) первой матрицы переместилась в позицию (4, 1) последней. Это соответствовало изменению четвертой строки, соответствующей переходам из маркировки $M'_4 \in ME(N)$, отражающему остальные дискретные вероятности (в нашем случае это вероятность срабатывания мгновенного перехода i после экспоненциального e). Будем говорить, что элемент (4, 1) представляет вероятность смены состояний в результате последовательности срабатываний $e + i$.

В третьей строке \mathbf{P} единственный ненулевой элемент — единица в позиции (3, 2), что соответствует последовательности $d + i$.

Во второй строке \mathbf{P} ненулевые элементы находятся в позициях (2, 1), соответствующей последовательности $d + i$, и (2, 2), соответствующей последовательности $e + d + i$.

В первой строке \mathbf{P} ненулевые элементы находятся в позициях (1, 1), соответствующей последовательности $e + d + i$, и (1, 2), соответствующей последовательности $e + e + d + i$, а также (1, 4), соответствующей последовательности d .

Стабильная ФМВ “визитов” для ВДВМЦ является решением следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} (1 - e^{-\lambda\theta} + e^{-3\lambda\theta})\psi_1 - e^{-\lambda\theta}\psi_2 = \psi_4, \\ (1 - e^{-\lambda\theta})(1 - e^{-2\lambda\theta})\psi_1 = e^{-\lambda\theta}\psi_2, \\ \psi_3 = 0, \\ e^{-2\lambda\theta}\psi_1 = \psi_4, \\ \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = 1. \end{cases}$$

В результате получаем

$$\psi = \frac{1}{1 + e^{-2\lambda\theta} + 2e^{-3\lambda\theta}}(e^{-\lambda\theta}, (1 - e^{-\lambda\theta})(1 - e^{-2\lambda\theta}), 0, e^{-3\lambda\theta}).$$

Так как детерминированный переход t_3 независимый, то $SJ(M_1) = SJ(M_2) = \theta$. Поэтому вектор среднего времени пребывания в маркировках таков:

$$SJ = \left(\theta, \theta, \theta, \frac{1}{3\lambda} \right).$$

Взвешенная по SJ стабильная ФМВ ψ есть:

$$\left(\psi_1\theta, \psi_2\theta, 0, \frac{\psi_4}{3\lambda} \right).$$

Время пребывания в маркировках M_1 и M_2 должно быть перераспределено между ними и маркировкой M_3 . Пусть

$$c_k = \int_0^{\theta} e^{-k\lambda x} dx = \frac{1 - e^{-k\lambda\theta}}{k\lambda\theta} \quad (1 \leq k \leq 3).$$

Тогда матрица преобразования такова:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_2 & c_1 - c_3 & 1 - c_1 - c_2 + c_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 1 - c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Измененная посредством матрицы преобразования взвешенная стабильная ФМВ есть:

$$\left(\psi_1\theta c_2, \psi_1\theta(c_1 - c_3) + \psi_2\theta c_1, \psi_1\theta(1 - c_1 - c_2 + c_3) + \psi_2\theta(1 - c_1), \frac{\psi_4}{3\lambda} \right).$$

Остается нормализовать измененную взвешенную стабильную ФМВ, разделив ее на сумму собственных компонентов. Таким образом, стабильная ФМВ для ДССП выглядит так:

$$\varphi = \left(\psi_1 c_2, \psi_1(c_1 - c_3) + \psi_2 c_1, \psi_1(1 - c_1 - c_2 + c_3) + \psi_2(1 - c_1), \frac{\psi_4}{3\lambda\theta} \right) \times \left(\psi_1 + \psi_2 + \frac{\psi_4}{3\lambda\theta} \right)^{-1}.$$

6.4. Выводы

Определенные выше непомеченные ДССП естественно использовать, когда все переходы соответствуют логически разным активностям, как в рассмотренном примере. Однако в других случаях, когда разные переходы моделируют одинаковые активности, пометка будет полезна. Но даже просто для улучшения наглядности удобна пометка переходов L_N для рассмотренной ДССП, присваивающая переходам следующие действия: $L_N(t_1) = \text{Require}$, $L_N(t_2) = \tau$, $L_N(t_3) = \text{Serve}$. Темпы и задержки логично присвоить действиям. Тогда в нашем примере темп *Require* будет равен λ , задержка $\tau = 0$, а задержка *Serve* — θ .

ДССП — дополнение ОССП возможностью введения произвольных фиксированных задержек неэкспоненциальных переходов, а не только

нулевых, как в ОССП. Таким образом, обогащен класс распределений вероятностей задержек переходов. Это позволило моделировать реальные динамические системы более естественным образом, поскольку экспоненциальное распределение во многих случаях дает лишь грубое приближение характеристик систем, а постоянное нулевое распределение не является существенным расширением упомянутого класса.

Однако за увеличение моделирующей способности при переходе к более выразительному типу ССП приходится платить возрастанием сложности решения построенных моделей. В рассмотренном примере добавление дополнительной фишки, соответствующей третьему посетителю, существенно усложнило вычисление аналитического решения и вид результата. В случае ДССП основная сложность заключается в необходимости обращения матриц и многократного вычисления матричных экспонент. Обычно матрицы, экспоненты которых вычисляются для получения решения ДССП, являются довольно разреженными, т. е. с большим количеством нулевых элементов. Но время вычисления растет очень быстро с увеличением заполнения матриц, а также произведения детерминированного и экспоненциального времени задержек параллельных переходов.

Еще более сложным стало бы решение без ограничения до одного числа детерминированных переходов, допустимых в маркировке. С таким строгим ограничением, тем не менее, возможно моделировать определенное число интересных приложений. В [29] ограничение было снято теоретическими методами, однако на практике такое решение было бы неприемлемо из-за проблемы “взрывного” роста числа состояний.

Для моделирования без упомянутых ограничивающих условий более удобны детерминированные ДВССП (ДДВССП), определенные в [72, 73]. Они являются расширением ДВССП посредством введения детерминированных переходов в дополнение к геометрическим. Таким образом, ДДВССП можно считать дискретным аналогом ДССП. Так как постоянное распределение задержек детерминированных переходов представляет из себя частный случай геометрического, анализ ДДВССП возможен без ограничения на количество допустимых детерминированных переходов.

Из-за сложности аналитического решения ДССП часто применяются разбиение на подсистемы и численные методы.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе были рассмотрены четыре наиболее известных типа ССП. Описаны методы их анализа и даны иллюстративные примеры.

Проведено сравнение и обсуждены сферы применимости данных видов ССП. Также предложены способы введения пометки переходов, которая дает возможность более естественно представлять системы и сравнивать ССП на качественную и количественную эквивалентность. На наш взгляд, самыми перспективными являются модели на основе ДВССП, такие как ДДВССП, поскольку дискретность времени позволяет рассматривать разнообразные виды распределений вероятностей временных задержек и использовать параллелизм, присущий структуре СП, благодаря шаговой семантике. Также желательно ввести пометку переходов ССП указанных типов.

Систематическое изложение теории ССП и связанных с ними понятий можно найти в монографиях [13, 67]. В литературе было рассмотрено много примеров исследования производительности реально существующих систем с помощью ССП [17, 34]. Для автоматизации моделирования и анализа с помощью ССП был разработан ряд программных продуктов, которые успешно применяются на практике [12, 25, 26, 38, 53].

В настоящее время используется большое количество различных типов ССП, разработанных для конкретной области или типа моделируемых систем и призванных облегчить их спецификацию и анализ. Так, кроме упомянутых во введении видов ССП, в последние годы появилось много расширений ССП совершенно иного рода, основанных на существенном изменении определения СП, в которые вводится стохастическая модель времени.

В частности, для моделирования стохастических потоковых флюидных систем в [65] были введены *флюидные ССП (ФССП)*. ФССП были рассмотрены также в [22, 31, 36, 64, 66]. ФССП — расширение ССП “непрерывными” местами, содержащими вместо дискретных фишек непрерывный флюид (непрерывные фишки), и дугами, по которым он может передвигаться. Непрерывные места заполняются и опорожняются с непрерывной скоростью. Флюид может использоваться для приближения большого числа фишек, что сокращает число состояний. ФССП имеют переходы обычного вида. С помощью ФССП можно моделировать физические системы с текучими веществами, контроль за которыми осуществляется с помощью дискретной логики. Дискретные и непрерывные порции данных могут влиять друг на друга. В стандартных ФССП “первого порядка” скорость потока флюида — детерминированная. В ФССП “второго порядка”, определенных в [68–71], она нормально распределена. Для исследования ФССП широко используются моделирование и численные методы, так как аналитический метод анализа требует решения множества сложных уравнений с частными производными.

Было рассмотрено много расширений ФССП. Например, в [35] определены *гибридные ССП (ГССП)*, разработанные для моделирования динамических систем с дискретными и непрерывными компонентами. Дискретные изменения состояний являются марковскими, а непрерывные переменные — детерминированными. ГССП содержат особые непрерывные переходы, предназначенные для продвижения непрерывных маркировок. В ГССП также вводятся правила допуска и срабатывания переходов, отличные от присущих ФССП. Библиографию по различным типам гибридных СП (не только стохастическим) можно найти в [28].

В [23, 75] были введены *цветные ССП (ЦССП)*, стохастическое расширение СП с цветными фишками. Переходы ЦССП имеют стохастические и детерминированные задержки. ЦССП предназначены для моделирования технологических и экономических процессов.

Итак, можно сделать следующие выводы о такой модели динамических систем, как ССП.

ССП обладают следующими *преимуществами*.

- Удобны как для исследования теоретических аспектов функционирования систем с разделяемыми ресурсами, так и для создания средств их разработки.
- Производительность, т. е. среднее время прогона, можно оценить уже из структуры ССП, а детальный анализ производительности осуществляется через построенную МЦ по известным алгоритмам.
- Успешно применяются в ситуациях, когда синхронизация является определяющей, например, для анализа систем с согласованным функционированием компонентов.

Однако, ССП обладают и следующим рядом *недостатков*.

- Высокая сложность спецификации больших систем из-за отсутствия средств модульности и громоздкости соответствующих ССП.
- При переходе к более общим типам ССП, имеющим большую выразительную силу, за получение алгоритма решения приемлемой сложности приходится платить аналитическими и структурными ограничениями. Результат аналитического решения для практически интересных систем обычно получается слишком громоздким, что вынуждает применять исследование систем по частям, а также моделирование и численные методы.
- Параллелизм, содержащийся в СП, на основе которой определяются ССП, не вполне отражается в построенной МЦ. В лучшем случае, для ДВССП мы имеем семантику шагов параллельных действий, которая не учитывает все аспекты параллелизма.

Исследования теории и практической применимости ССП ведутся

очень активно, и есть уверенность, что преимущества новых моделей превзойдут их недостатки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боровков А.А.** Теория вероятностей. — М.: Наука, 1986. — 432 с.
2. **Гнеденко В.В.** Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1969. — 400 с.
3. **Котов В.Е.** Сети Петри. — М.: Наука, 1984. — 160 с.
4. **Вентцель А.Д.** Курс теории случайных процессов. — М.: Наука, 1975. — 319 с.
5. **Van der Aalst W.M.P.** Interval timed coloured Petri nets and their analysis // Lect. Notes in Comput. Sci. — 1993. — Vol. 691. — P. 453–472.
6. **Van der Aalst W.M.P.** Using interval timed coloured Petri nets to calculate performance bounds // Ibid. — 1994. — Vol. 794. — P. 425–444.
7. **Van der Aalst W.M.P., van Hee K.M., Reijers H.A.** Analysis of discrete-time stochastic Petri nets // Statistica Neerlandica. — 2000. — Vol. 54, N 2. — P. 237–255. — <http://tmitwww.tn.tue.nl/staff/hreijers/H.A.ReijersBestanden/Statistica.pdf>
8. **Van der Aalst W.M.P., Odiijk M.A.** Analysis of railway stations by means of interval timed coloured Petri nets // Real Time Systems. — 1995. — Vol. 9, N 3. — P. 241–263. — <http://wwwis.win.tue.nl/~wsinwa/rts.ps>
9. **Balbo G.** Introduction to stochastic Petri nets // Lect. Notes in Comput. Sci. — 2000. — Vol. 2090. — P. 84–155.
10. **Balbo G., Bruell S.C., Ghanta S.** Combining queueing network and generalized stochastic Petri net models for the analysis of some blocking phenomena // IEEE Transactions on Software Engineering. — 1986. — Vol. 12, N 4. — P. 561–576.
11. **Berthomieu B., Diaz M.** Modelling and verification of time dependent systems using time Petri nets // Ibid. — 1991. — Vol. 17, N 3. — P. 259–273.
12. **Bernardi S.** GreatSPN, version 2.0.2. User's manual. — Performance Evaluation Group, Faculty of Computer Science, University of Turin, Italy, 2002. — <http://www.di.unito.it/~susi/DIDATTICA/ISSPD-0102/manual.pdf>
13. **Bause F., Kritzinger P.S.** Stochastic Petri nets: an introduction to the theory. 2nd Edition. — Vieweg Verlag, 2002. — 218 p.
14. **Buchholz P., Tarasyuk I.V.** Net and algebraic approaches to probabilistic modeling // Joint Bulletin of NCC & IIS. Ser.: Comput. Sci. — 2001. — Iss. 15. — P. 31–64. — <http://www.iis.nsk.su/persons/itar/spnpancc.zip>
15. **Buchholz P.** A notion of equivalence for stochastic Petri nets // Lect. Notes in Comput. Sci. — 1995. — Vol. 935. — P. 161–180.
16. **Buchholz P.** Iterative decomposition and aggregation of labeled GSPNs // Ibid. — 1998. — Vol. 1420. — P. 226–245.
17. **Ciardo G., Cherkasova L., Kotov V., Rokicki T.** Modeling a scalable high-speed interconnect with stochastic Petri nets // Proc. of 6th Internat. Workshop on Petri Nets and Performance Models. — North Carolina, USA: IEEE Computer Society Press, 1995. — P. 83–92. — http://www.hp1.hp.com/personal/Lucy_Cherkasova/papers/pnpm95.pdf
18. **Ciardo G., German R., Lindemann C.** A characterization of the stochastic process underlying a stochastic Petri net // IEEE Transactions on Software Engineering. — 1994. — Vol. 20, N 7. — P. 506–515. — <http://www.cs.wm.edu/~ciardo/pubs/1994IEEEETSE-Characterization.pdf>

19. **Christoff I.** Testing equivalence and fully abstract models of probabilistic processes // *Lect. Notes in Comput. Sci.* — 1990. — Vol. 458. — P. 128–140.
20. **Ciardo G.** Discrete time Markovian stochastic Petri nets // *Numerical Solution of Markov Chains* / Ed. by W.J. Stewart. — Kluwer Academic Publishers, 1995. — P. 339–358. — <http://www.cs.wm.edu/~ciardo/pubs/1995NSMC-Discrete.pdf>
21. **Chiola G., Marsan M.A., Balbo G., Conte G.** Generalized stochastic Petri nets: a definition at the net level and its implications // *IEEE Transactions on Software Engineering.* — 1993. — Vol. 19, N 2. — P. 89–107.
22. **Ciardo G., Nicol D., Trivedi K.S.** Discrete event simulation of fluid stochastic Petri nets // *IEEE Transactions on Software Engineering.* — 1999. — Vol. 25, N 2. — P. 207–217. — <http://www.cs.wm.edu/~ciardo/pubs/1999IEEETSE-FSPNsimul.ps>
23. **Dehnert J., Freiheit J., Zimmermann A.** Workflow modeling and performance evaluation with coloured stochastic Petri nets // *Proc. of AAAI Spring Symp. Series 2000, Workshop on Bringing Knowledge to Business Processes.* — Stanford, USA, 2000. — P. 139–141. — <http://aifbhermes.aifb.uni-karlsruhe.de/AAAI2000/CameraReady/JDehnert00.ps>
24. **Dugan J.B., Trivedi K.S., Geist R.M., Nicola V.F.** Extended stochastic Petri nets: applications and analysis // *Proc. of 10th Internat. Symp. on Computer Performance Modelling, Measurement and Evaluation.* — Paris, Amsterdam: Elsevier, 1984. — P. 507–519.
25. **Franceschinis G., Donatelli S., Gaeta R.** GreatSPN 2.0: Graphical editor and analyzer for timed and stochastic Petri nets // *Proc. of 21st Internat. Conf. on Application and Theory of Petri Nets.* — Aarhus, Denmark, 2000. — P. 43–50. — http://www.daimi.au.dk/pn2000/proceedings/pn2000_tooldemos.pdf
26. **Fricks R., Hirel C., Wells S., Trivedi K.** The development of an integrated modeling environment // *Proc. of World Congress on Systems Simulation.* — Singapore, 1997. — P. 471–476. — <http://www.ec.duke.edu/~chirel/PAPER/wcss97.ps>
27. **Florin G., Natkin S.** Les reseaux de Petri stochastiques // *Technique et Science Informatique.* — 1985. — Vol. 4, N 1. — P. 143–160.
28. **Giua A., Corona D.** Bibliography on hybrid Petri nets. — Department of Electroengineering and Electronics, University of Cagliari, Italy, 2002. — <http://bode.diee.unica.it/~hpn>.
29. **German R.** Analysis of stochastic Petri nets with non-exponentially distributed firing times: Ph.D. Thesis / Technical University of Berlin. — Berlin, Germany, 1994.
30. **German R., Lindemann C.** Analysis of stochastic Petri nets by the method of supplementary variables // *Performance Evaluation.* — 1994. — Vol. 20, N 1–3. — P. 317–335.
31. **Gribaudo M., Serena M., Horváth A., Bobbio A.** Fluid stochastic Petri nets augmented with flush-out arcs: modelling and analysis // *Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications.* — 2001. — Vol. 11, N 1–2. — P. 97–117. — <http://www.mfn.unipmn.it/~bobbio/BIBLIO/PAPERS/ANNO01/deds2001.pdf>
32. **Haverkort B.R.** Markovian models for performance and dependability evaluation // *Lect. Notes in Comput. Sci.* — 2000. — Vol. 2090. — P. 38–83.
33. **Herzog U.** Formal methods for performance evaluation // *Ibid.* — P. 1–37.
34. **Heindl A., German R.** Performance modeling of IEEE 802.11 wireless LANs with stochastic Petri nets // *Performance Evaluation.* — 2001. — Vol. 44. — P. 139–164. — <http://netlab.cs.tsinghua.edu.cn/xuke/paperlist/perfmod.pdf>

35. **Horton G., Kowarschik M.** Discrete–continuous modeling using hybrid stochastic Petri nets // Proc. of 11th European Simulation Symp. — Erlangen-Nuremberg, Germany, 1999. —
<http://www10.informatik.uni-erlangen.de/~markus/doc/ess99.pdf>
36. **Horton G., Kulkarni V.G., Nicol D.M., Trivedi K.S.** Fluid stochastic Petri nets: theory, applications, and solution techniques // European J. of Operations Research. — 1998. — Vol. 105, N 1. — P. 184–201. —
<http://www.cs.dartmouth.edu/~nicol/papers-cv/nj-38.pdf>
37. **Haas P.J., Shedler G.S.** Stochastic Petri net representation of discrete event simulations // IEEE Trans. on Software Eng. — 1987. — Vol. 15, N 4. — P. 381–393.
38. **Hirel Ch., Tuffin B., Trivedi K.S.** SPNP: stochastic Petri nets. Version 6.0 // Lect. Notes in Comput. Sci. — 2000. — Vol. 1786. — P. 354–357. —
http://www.ee.duke.edu/~kst/spn_papers/paperSpnp.pdf
39. **Holliday M.A., Vernon M.K.** A generalized timed Petri net model for performance analysis // IEEE Trans. on Software Eng. — 1987. — Vol. 13, N 12. — P. 1297–1310.
40. **Jensen K.** Coloured Petri nets. Basic concepts, analysis methods and practical use. — Berlin: Springer Verlag, 1996. — 234 p.
41. **Kulkarni V.G.** Modeling and analysis of stochastic systems. — London: Chapman and Hall, 1995. — 624 p.
42. **Larsen K., Skou A.** Bisimulation through probabilistic testing // Information and Computation. — 1991. — Vol. 94. — P. 1–28.
43. **Marsan M.A.** Stochastic Petri nets: an elementary introduction // Lect. Notes in Comput. Sci. — 1990. — Vol. 424. — P. 1–29.
44. **Marsan M.A., Balbo G., Bobbio A. et al.** The effect of execution policies on the semantics and analysis of stochastic Petri nets // IEEE Trans. on Software Eng. — 1989. — Vol. 15, N 7. — P. 832–846.
45. **Marsan M.A., Balbo G., Chiola G., Conte G.** Generalized stochastic Petri Nets revisited: random switches and priorities // Proc. of Intern. Workshop on Petri Nets and Performance Models, Madison, USA. — Washington: IEEE Computer Society Press, 1987. — P. 44–53.
46. **Marsan M.A., Balbo G., Chiola G., et al.** An introduction to generalized stochastic Petri nets // Microelectronics and Reliability. — 1991. — Vol. 31, N 4. — P. 699–725.
47. **Marsan M.A., Chiola G.** On Petri nets with deterministic and exponentially distributed firing times // Lect. Notes in Comput. Sci. — 1987. — Vol. 266. — P. 132–145.
48. **Marsan M.A., Conte G., Balbo G.** A class of generalized stochastic Petri nets for performance evaluation of multiprocessor systems // ACM Trans. on Comput. Sys. — 1984. — Vol. 2, N 2. — P. 93–122.
49. **Marsan M.A., Chiola G., Fumagalli A.** Improving the efficiency of the analysis of DSPN models // Lect. Notes in Comput. Sci. — 1990. — Vol. 424. — P. 30–50.
50. **Merlin P., Farber D.J.** Recoverability of communication protocols: implications of a theoretical study // IEEE Trans. on Commun. — 1976. — Vol. 24, N 9. — P. 1036–1043.
51. **Molloy M.** Performance analysis using stochastic Petri nets // IEEE Trans. on Comput. — 1982. — Vol. 31, N 9. — P. 913–917.
52. **Molloy M.** Discrete time stochastic Petri nets // IEEE Trans. on Software Eng. — 1985. — Vol. 11, N 4. — P. 417–423.

53. **Mujica I.R.** Comparison of three SPN Packages: GreatSPN 1.6, DSPNexpress 1.2, SPNP 3.0. — Edinburgh, 1994. — 50 p. — (Tech. Rep. / Univ. of Edinburgh, Computer Systems Group, Department of Computer Science; Vol. ECS-CSG-4-94). — <http://www.icsa.informatics.ed.ac.uk/reports/ECS-CSG-4-94.ps.gz>
54. **Murata T.** Petri nets: properties, analysis and applications // Proc. of the IEEE. — 1989. — Vol. 77, N 4. — P. 541–580.
55. **Noe J.D., Nutt G.J.** Macro e-net representation of parallel systems // IEEE Trans. on Comput. — 1973. — Vol. 31, N 9. — P. 718–727.
56. **Peterson J.L.** Petri net theory and modeling of systems. — Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1981. (Перевод на русский язык: **Питерсон Дж.** Теория сетей Петри и моделирование систем. — М.: Мир, 1984.)
57. **Petri C.A.** Kommunikation mit Automaten: Ph.D. thes. / Universität Bonn, Schriften des Instituts für Instrumentelle Mathematik, 1962 (in German).
58. **Ramchandani C.** Performance evaluation of asynchronous concurrent systems by timed Petri nets: Ph.D. thes. / Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1973.
59. **Reisig W.** Petri nets: an introduction. — EATCS Monographs on Theor. Comput. Sci. Vol. 4. — Berlin: Springer Verlag, 1985.
60. **Ramamoorthy C.V., Ho G.S.** Performance evaluation of asynchronous concurrent systems using Petri nets // IEEE Trans. on Software Eng. — 1980. — Vol. 6, N 5. — P. 440–449.
61. **Sifakis J.** Performance evaluation of systems using nets // Lect. Notes in Comput. Sci. — 1980. — Vol. 84. — P. 307–319.
62. **Symons F.J.W.** The description and definition of queueing systems by numerical Petri nets // Australian Telecommunications Research. — 1980. — Vol. 13, N 2. — P. 20–31.
63. **Symons F.J.W.** Introduction to numerical Petri nets, a general graphical model of concurrent processing systems // Ibid. — Vol. 4, N 1. — P. 28–32.
64. **Tuffin B., Chen D.S., Trivedi K.S.** Comparison of hybrid system and fluid stochastic petri nets // Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications. — 2001. — Vol. 11, N 1–2. — P. 77–96. — http://www.ee.duke.edu/~kst/spn_papers/deds.ps
65. **Trivedi K.S., Kulkarni V.G.** FSPNs: fluid stochastic Petri nets // Lect. Notes in Comput. Sci. — 1993. — Vol. 691. — P. 24–31. — http://www.ee.duke.edu/~kst/spn_papers/pn93.ps
66. **Tuffin B., Trivedi K.S.** Importance sampling for the simulation of stochastic Petri nets and fluid stochastic Petri nets // Proc. of High Performance Comput. Symp., Advanced Simulation Technologies Conf. — Seattle, USA, 2001. — http://www.ee.duke.edu/~kst/spn_papers/hpc2001.ps
67. **Wang J.** Timed Petri nets: theory and application. — Kluwer Academic Publishers, 1985. — 290 p.
68. **Wolter K., German R.** Second order non-Markovian fluid stochastic Petri nets // Proc. of 3th Workshop on Performability Modeling of Computer and Communication Systems. — Chicago, USA, 1996. — P. 25–28. — <http://www.cs.tu-berlin.de/~katinka/pmccs3.ps>
69. **Wolter K., Hommel G.** Hybrid modelling with second order fluid stochastic Petri nets // Proc. of Workshop on Parallel and Distributed Real-Time Systems. — Geneva, Switzerland, 1997. — P. 239–243. — <http://www.cs.tu-berlin.de/~katinka/genf.ps>

-
70. **Wolter K.** Second order fluid stochastic Petri nets: an extension of GSPNs for approximate and continuous modelling // Proc. of Workshop on Analytical and Numerical Modelling Techniques, 1st World Congress on Systems Simulation. — Singapore, 1997. — P. 328–332. — <http://www.cs.tu-berlin.de/~katinka/anmt.ps>
 71. **Wolter K.** Jump transitions in second order FSPNs // Proc. of 7th Intern. Symp. on Modeling, Analysis and Simulation of Computer and Telecommunication Systems. — College Park, 1999. — P. 156–163. — <http://www.cs.tu-berlin.de/~katinka/mascots99.ps>
 72. **Zijal R., Ciardo G., Hommel G.** Discrete Deterministic and Stochastic Petri Nets // Proc. of 9th ITG/GI Professional Meeting “Messung, Modellierung und Bewertung von Rechen- und Kommunikationssystemen”. — Freiberg, Berlin: VDE-Verlag, 1997. — P. 103–117. — <http://www.cs.wm.edu/~ciardo/pubs/1997MMB-DDSPN.pdf>
 73. **Zimmermann A., Freiheit J., Hommel G.** Discrete time stochastic Petri nets for modeling and evaluation of real-time systems // Proc. of Workshop on Parallel and Distributed Real Time Systems. — San Francisco, 2001. — <http://pdv.cs.tu-berlin.de/~azi/texte/WPDRTS01.pdf>.
 74. **Zijal R., German R.** A new approach to discrete time stochastic Petri nets // Lect. Notes in Control and Information Sci. — 1994. — Vol. 199. — P. 198–204.
 75. **Zimmermann A., Hommel G.** Modelling and evaluation of manufacturing systems using dedicated Petri nets // Intern. J. of Advanced Manufacturing Technology. — 1999. — Vol. 15, N 2. — P. 132–138. — <http://pdv.cs.tu-berlin.de/~azi/texte/IJAMT.ps.gz>
 76. **Zuberek W.M.** Timed Petri nets and preliminary performance evaluation // Proc. of 7th Annual Symp. on Comput. Architecture. — La Baule, France, 1980. — P. 88–96.